Interference a ohyb světla

Pomůcky: železná deska s magnetickými stojánky, He-Ne laser Lasos LGK 7512P (593.932 nm, 5 mW), He-Ne laser Lasos LGK 7770 (543.365 nm, 5 mW), 2 zrcadla, 1 dělič svazku (Abbeho kostka), laboratorní zvedák, optická lavice s jezdci, 2 spojné čočky (+50, +250), rozptylka (-50), sada kruhových otvorů, šterbina s nastavitelnou šířkou, držák na mřížku, opt. mřížka 600 vrypů na mm, stínítko na zdi, pásmo (5 m), měřítko (1 m), rtuťová výbojka, goniometr, lampička s reostatem, měřící mikroskop,

1 Základní pojmy a vztahy

Světlo je elektromagnetické vlnění o vlnové délce 400 až 700 nm. Díky jeho vlnovým vlastnostem a elektromagnetickém původu ho můžeme popsat Maxwellovými rovnicemi, které jsou lineární. A z linearity Maxwellových rovnic plyne, že elektromagnetické vlny můžeme superponovat. Superpozice těchto vln se pak projevuje jevy zvanými **interference** a **difrakce**.

Abychom dokázali tyto jevy popsat, použijeme Babinetův doplňkový princip, který ve stručnosti říká, že pokud mezi detektor a zdroje elektromagnetických vln umístíme stínítko, tak se samotné stínítko stává zdrojem. V místech, kde je pro elektromagnetické záření nepropustný materiál se generuje opačné pole, které ruší pole dopadajících vln. Místa, která jsou prostupná, tak tvoří jako by nové zdroje.

1.1 Difrakce na mřížce

Optická mřížka je obvykle skleněná destička s nanesenou měkkou vrstvou, do níž jsou pomocí diamantového nástroje vyryty rovnoběžné vrypy. Musí být přesně stejně široké a od sebe přesně stejně vzdáleny. Vzdálenost středů sousedních vrypů se nazývá **mřížková konstanta** d.

Experimentální uspořádání se bude v úloze blížit tvz. **Frauenhoferově difrakci**, pro kterou platí, že zdroj světla i stínítko je velmi vzdálené od difrakčního předmětu (mřížky, štěrbiny, otvoru).

Ze zdroje Z (He-Ne laser) se šíří koherentní monochromatické světlo, které je však rozbíhavé. Pomocí Keplerova dalekohledu vytvoříme rovinné vlny, které potom dopadají na mřížku. Babinetův princip nám říká, že jednotlivé vrypy mřížky můžeme považovat za zdroje (viz obrázek 1 - zdroje $P_1 \dots P_N$), každý o intenzitě E_0. Z těchto zdrojů se budou šířit cylindrické vlny, které budou spolu interferovat a na stínítku vytvoří interferenční maxima a minima. Elektrické pole vzniklé touto interferencí bude reálná část pole

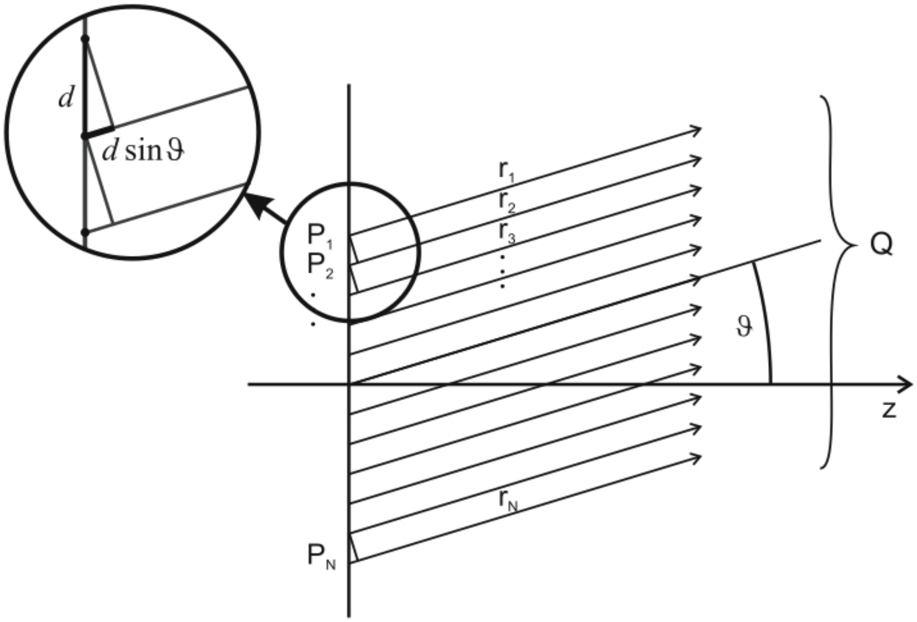
$$
\begin{aligned}
E &= E_0 e^{j\omega t} \underbrace{\left(1 + e^{-j\phi} + e^{-2j\phi} + \dots + e^{-(N-1)j\phi}\right)}_{\text{geometrická řada}} \\
E &= E_0 e^{j\omega t} \frac{1 - e^{-jN\phi}}{1 - e^{-j\phi}}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

kde ϕ je fázový rozdíl mezi sousedními zdroji. Intenzita, kterou detekuje lidské oko, je potom střední hodnota Poyntingova vektoru

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E E^* = I_0 \frac{\left(1 - e^{-jN\phi}\right)\left(1 - e^{jN\phi}\right)}{\left(1 - e^{-j\phi}\right)\left(1 - e^{j\phi}\right)} \\
I &= I_0 \frac{2 - 2\cos(N\phi)}{2 - 2\cos(\phi)} \qquad I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \\
\frac{I}{I_0} &= \frac{\sin^2(N\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Úhel ϑ je pro všechny paprsky díky Frauenhoferově podmínce stejný (vzdálenost stínítka od mřížky je mnohem větší, než mřížková konstanta - a tedy rozdíly mezi úhly jednotlivých paprsků můžeme zanedbat). Potom (viz obrázek 1) platí:

$$
\phi = kd \sin\vartheta \tag{3}
$$



Obrázek 1: Mřížka

kde k je vlnové číslo : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, d mřížková konstanta a ϑ úhel, pod kterým je vidět mřížka z konkrétního místa na stínítku (bod Q). Díky Fraunhoferově podmínce $L >> Nd$ (L je vzdálenost mřížky od stínítka) lze použít geometrii na obrázku 1 a ϕ ze vztahu (3) dosadit dosadit za ϕ ve vztahu (2). V bodě Q budeme mít relativní intenzitu

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\sin^2(\frac{1}{2}Nkd\sin\vartheta)}{\sin^2(\frac{1}{2}kd\sin\vartheta)} \tag{4}$$

Tato funkce nabývá tzv. **hlavní maxima**

$$\lim_{\sin\vartheta\to\frac{m\lambda}{d}} \frac{I}{I_0} = N^2, \text{ v bodech } \sin\vartheta_m = \frac{2\pi m}{kd} = \frac{m\lambda}{d}, \text{ kde } m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

minima

$$\frac{I}{I_0} = 0, \text{ v bodech } \sin\vartheta_{mm'} = \pm\left(m + \frac{m'}{N}\right)\frac{\lambda}{d}, \text{ kde } m' = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{6}$$

a sekundární maxima

$$\frac{I}{I_0} = \csc^2\left(\frac{\pi(m''+1/2)}{N}\right), \text{ v bodech } \sin\vartheta_{mm''} = \pm\left(m + \frac{m''+1/2}{N}\right)\frac{\lambda}{d}, \text{ kde } m'' = 1, 2, \ldots, N-2 \tag{7}$$

Vzhledem k tomu, že budeme pracovat s mřížkou s velkým počtem N, tak významná budou pouze hlavní maxima. Z polohy hlavních maxim lze určit vlnovou délku podle vztahu (5).

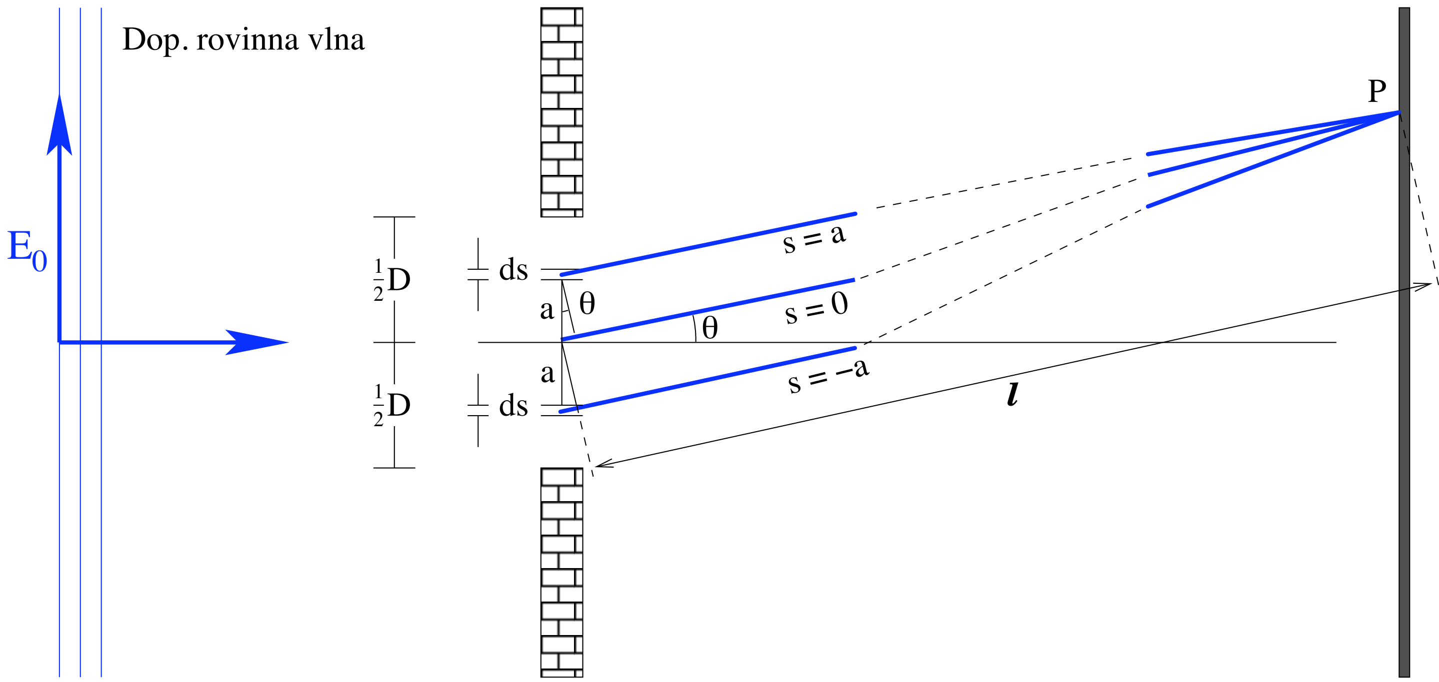
Centrální maximum odpovídá úhlu $\vartheta = 0$ a první minimum úhlu $\sin\vartheta \simeq \vartheta = \frac{\lambda}{Nd}$. Proto úhlová polo šířka centrálního maxima bude $\Delta\vartheta = \frac{\lambda}{Nd}$. Čím je počet vrypů N větší, tím jsou maxima ostřejší. To je důležité při spektrálním rozkladu světla. Zatím jsme totiž uvažovali pouze monochromatické světlo. Dopadá-li na mřížku světlo složené, např. bílé světlo žárovky, bude centrální maximum bílé, avšak již v 1. řádu budeme pozorovat příspěvky různých barev spektra pod různými úhly. Základní vlastností difrakční mřížky je tedy schopnost rozložit dopadající světlo do různých směrů podle vlnových délek, tj. provést **spektrální rozklad**. Praktický význam optické spektroskopie je v tom, že každá látka vyzařuje jistý, pro ni charakteristický, soubor **spektrálních čar**.

Protože spektrální čáry mohou mít velmi blízké vlnové délky (např. dublet sodíku), vzniká otázka, jaké vlastnosti musí mřížka mít, abychom takové čáry ve spektru zřetelně rozlišili. Podle **Rayleighova kritéria** jsou dvě blízké spektrální čáry λ_1, λ_2 rozlišeny v mřížkovém spektru 1. řádu, když úhlová vzdálenost středů maxim je větší nebo rovna úhlové pološířce maxim:

$$\left|\frac{\lambda_1}{d} - \frac{\lambda_2}{d}\right| \geq \frac{\lambda}{Nd} \tag{8}$$

1.2 Difrakce na štěrbině konečné délky

Štěrbinu konečné šířky D můžeme díky Huyghensově principu rozdělit na nekonečně mnoho nekonečně malých bodů šířky ds. Pokud na štěrbinu dopadají rovinné vlny monochromatického světla o intenzitě E_0 (viz obrázek 2), tak každý takový



Obrázek 2: Fraunhoferův ohyb světla na štěrbině

kousek můžeme považovat za elementární zdroj o intenzitě

$$\mathrm{d}E = E_0 \frac{\mathrm{d}s}{D} \tag{9}$$

Vztah (9) vychází z Babinetova principu. Elementárních zdrojů je nekonečně mnoho a každý má šířku ds. Jak je vidět na obrázku 2, jsou jednotlivé paprsky pocházející z elementárních zdrojů vůči sobě navzájem fázově posunuté. Tento fázový posun způsobí interferenci a v bodě P bude mít paprsek $s = a$ fázi

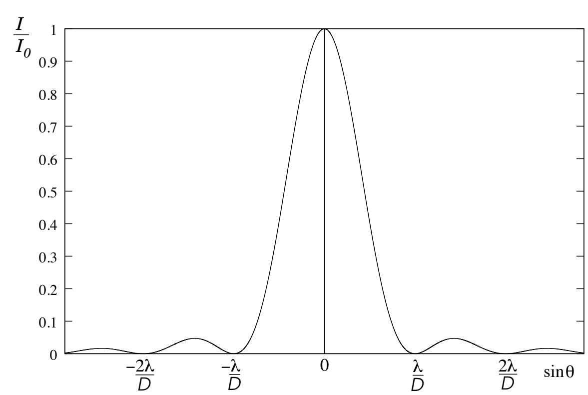
$$\omega t - k(l - a\sin\theta) = \omega t - kl + ka\sin\theta$$

a paprsek $s = -a$

$$\omega t - k(l + a\sin\theta) = \omega t - kl - ka\sin\theta$$

kde l je vzdálenost středu štěrbiny od sledovaného bodu P. Zdrojů (9) je ve štěrbině konečné šířky nekonečně mnoho. Jejich příspěvky sečteme a výsledná intenzita v bodě P bude:

$$\begin{aligned} E &= \int \mathrm{d}E = \int_{-D/2}^{D/2} \frac{E_0}{D} \exp\left[j(\omega t - kl + ks\sin\theta)\right] \mathrm{d}s \\ &= E_0 \exp\left[j(\omega t - kl)\right] \frac{\exp\left(\frac{1}{2}jkD\sin\theta\right) - \exp\left(\frac{1}{2}jkD\sin\theta\right)}{\frac{1}{2}jkD\sin\theta} \\ &= E_0 \exp\left[j(\omega t - kl)\right] \frac{\sin\left(jkD\sin\theta\right)}{\frac{1}{2}jkD\sin\theta} \\ \frac{I}{I_0} &= EE^* = \frac{\sin^2\left(jkD\sin\theta\right)}{\left(\frac{1}{2}jkD\sin\theta\right)^2} \end{aligned} \tag{10}$$

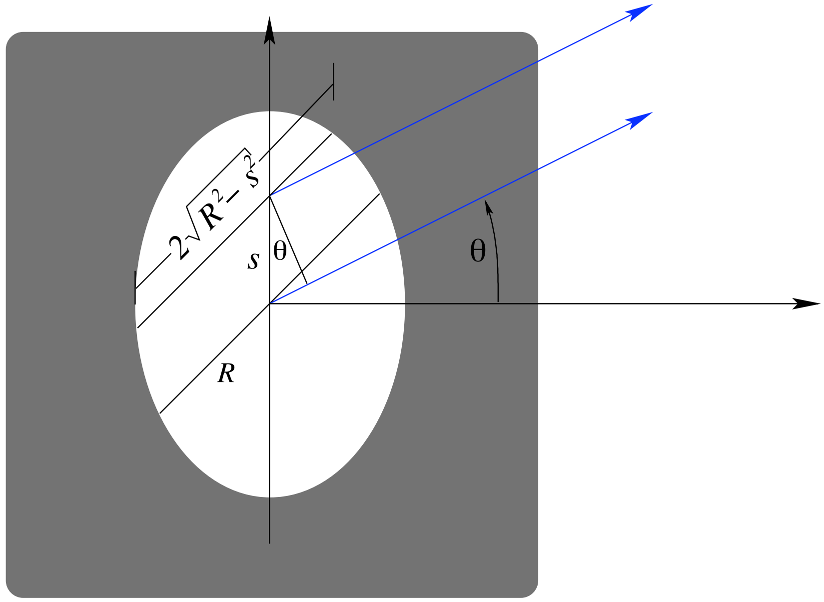


Obrázek 3: Relativní intenzita na stínítku po průchodu světla vlnové délky λ štěrbinou konečné šířky D

kde I_0 je intenzita centrálního maxima při $\theta = 0$. Pro minima (viz obrázek 3) platí

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{D} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{11}$$

1.3 Fraunhoferův ohyb na kruhovém otvoru



Obrázek 4: Kruhový otvor

Tak jako jsme si v předchozím odstavci mohli štěrbinu konečné šířky představit jako nekonečně mnoho nekonečně malých bodů, tak si kruhový otvor můžeme představit jako nekonečně mnoho štěrbin, které se rozšiřují a zužují podle funkce $2\sqrt{R^2 - s^2}$, kde R je poloměr kruhového otvoru a s vzdálenost od středu. Díky symetrii kruhového otvoru tak můžeme "babinetovsky" sčítat příspěvky

$$\mathrm{d}E = E_0 \frac{2\sqrt{R^2 - s^2}}{\pi R^2} \mathrm{d}s \tag{12}$$

horizontálních elementárních štěrbin.

$$E = \frac{2E_0 e^{j\omega t - kl}}{\pi R^2} \underbrace{\int_{-R}^{R} \exp(jks \sin\theta) \sqrt{R^2 - s^2} \mathrm{d}s}_{J} \tag{13}$$

Imaginární část integrálu J je lichou funkcí proměnné s a díky symetrii horní a dolní meze rovna 0. Po substitucích

$$\sin\theta = \frac{C\lambda}{R} \qquad\qquad u = \frac{s}{R} \tag{14}$$

dostaneme integrál J do tvaru

$$J(C) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - u^2} \cos(2\pi C u) \mathrm{d}u$$

což je eliptický integrál, který nemá primitivní funkci. K nalezení minima funkce (13) ale stačí hledat takovou hodnotu konstanty C, aby integrál $J(C)$ byl roven nule. Interval $\langle -1, 1\rangle$ rozdělíme na n podintervalů. V každém kroku x_i vypočteme hodnotu funkce $f(x_i) = \sqrt{1 - u^2} \cos(2\pi C u)$. Potom funkční hodnoty v krocích velikosti Δx sečteme

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left[f(x_i) - f(x_{i+1})\right] = \frac{1}{2} \Delta x (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n)$$

a dostaneme přibližný výsledek hodnoty integrálu $J(C)$. Totéž opakujeme pro různé hodnoty C a dostaneme závislost $J(C)$. V bodě, kde $J(C)$ protíná osu x, je námi hledaná konstanta C, která odpovídá minimu intenzity světla a tedy tmavému kroužku. Hodnoty C pro první, druhý a třetí tmavý kroužek dosadíme do prvního substitučního vztahu (14) a dostaneme finální vztahy

$$\sin\theta_1 = 0{,}610 \frac{\lambda}{R},\ \sin\theta_2 = 1{,}116 \frac{\lambda}{R},\ \sin\theta_3 = 1{,}619 \frac{\lambda}{R}, \tag{15}$$

kde λ je vlnová délka použitého světla, R je poloměr kruhového otvoru.

2 Experimentální uspořádání:

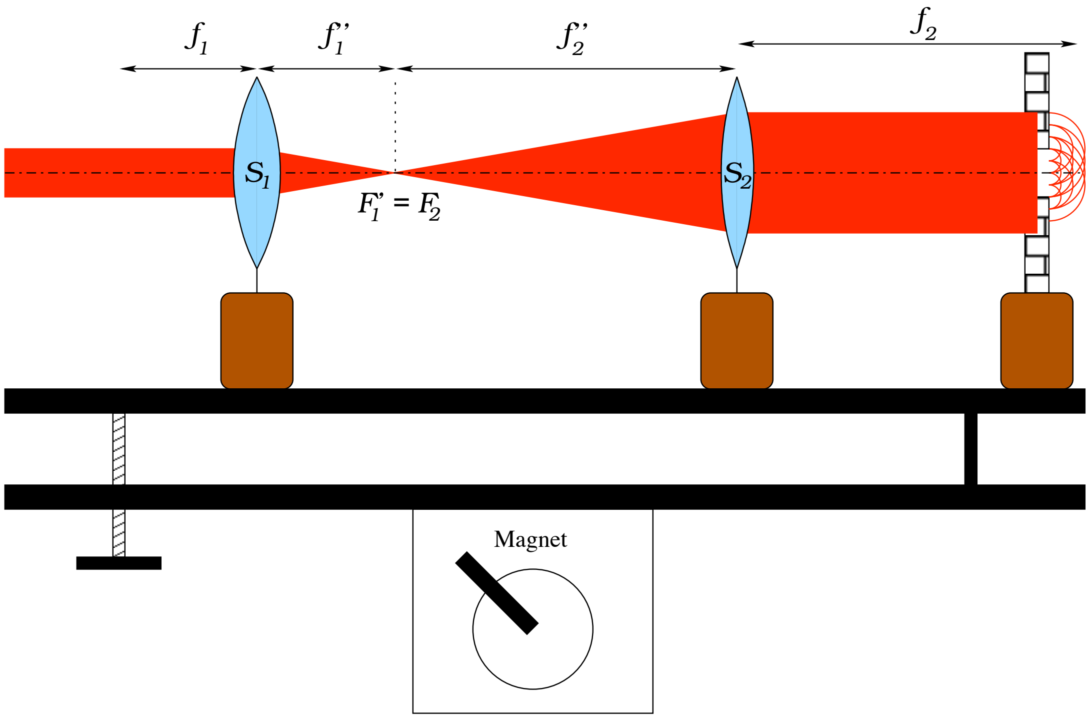
2.1 Měření rozměrů kruhového otvoru a štěrbiny z Fraunhoferových ohybových jevů

He-Ne laser, který máte k dispozici, generuje světelný paprsek v žluté oblasti spektra o vlnové délce světla 594 nm a o výkonu 5 mW. Průměr laserového svazku se s rostoucí vzdáleností od výstupního zrcadla laseru zvětšuje. Zvětšování průměru svazku se charakterizuje veličinou, která se nazývá divergence svazku. Divergence svazku d se rovná

$$d = \frac{D_2 - D_1}{v}$$

,

kde D_1 je průměr svazku v místě výstupního otvoru laseru, D_2 je průměr svazku ve vzdálenosti v. Minimální dosažitelná divergence d_m je limitována ohybem světla a lze ji odhadnout na hodnotu $d_m \sim 2\lambda/D_1$, kde λ je vlnová délka generovaného světla. Výpočet je uveden např. v knize [3] na str. 423 - 425.



Obrázek 5: Chod paprsků v Keplerově dalekohledu

Pro měření na kruhovém otvoru a na štěrbině budeme potřebovat rozšířit světelný svazek. Necháme laserový paprsek dopadat na spojku S_1 a do předmětového ohniska spojky S_1 umístíme obrazové ohnisko spojky S_2. Toto optické zařízení je totožné s Keplerovým dalekohledem. Jeho schéma je nakresleno na obrázku 5. Pomocí tohoto dalekohledu svazek rozšíříme a zmenšíme jeho divergenci.

Rozšířeným rovnoběžným světelným svazkem si posvítíte na štěrbinu nebo kruhový otvor (budete mít k dispozici štěrbinu s nastavitelnou šířkou a kruhové otvory různých rozměrů) a na stínítku budete pozorovat ohybový obrazec. Vzdálenost štěrbiny od stínítka musí být velká, aby pozorovaný ohyb byl Fraunhoferův. Dráhu světelného paprsku si dostatečně prodloužíte dvěma rovinnými zrcadly, posuvné stínítko s ryskou je umístěno na zdi.

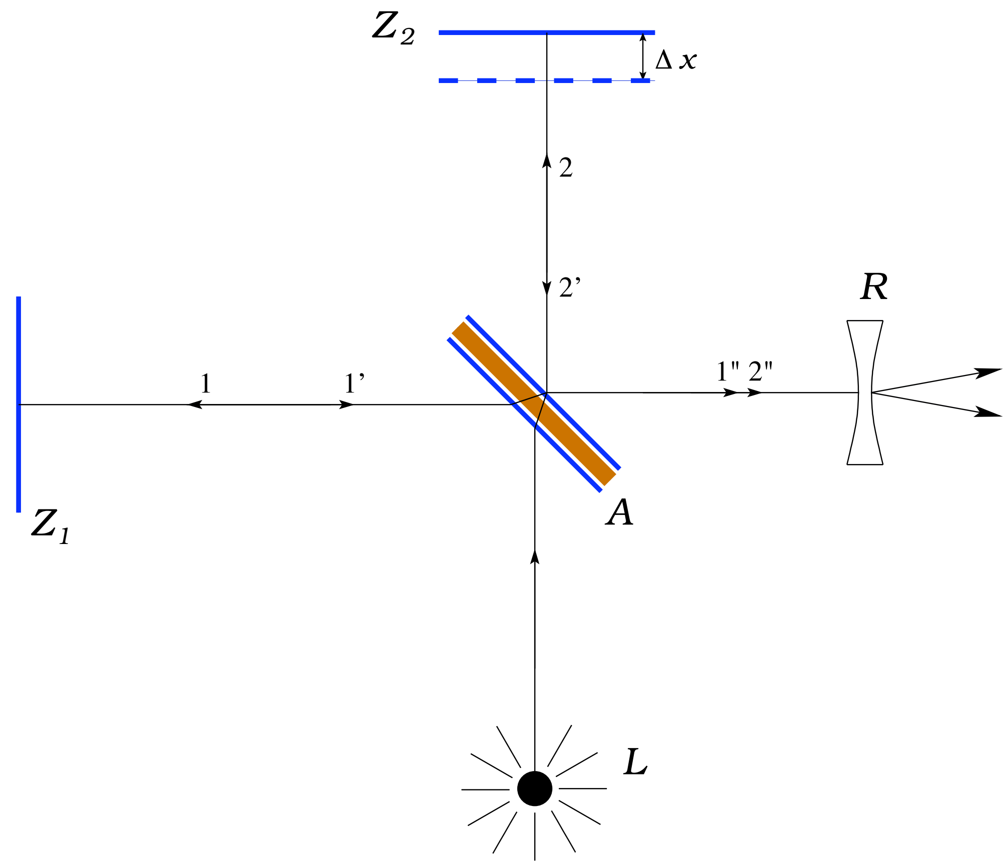
2.2 Měření mřížkové konstanty a vlnové délky rtuťového světla

Na ohybovou mřížku přímo bez rozšíření svazku dalekohledem posvítíte laserovým paprskem. Ohybová maxima budete pozorovat na tyči s měřítkem, kterou si položíte na kovový stůl. Změřte vzdálenost ohybových maxim a vzdálenost mřížky od měřítka a vypočítejte mřížkovou konstantu. Srovnejte Váš výpočet s hodnotou uvedenou na mřížce.

S touto mřížkou pak na malém goniometru změříte vlnovou délku hlavních čar rtuťového spektra (budete hledat ohybová maxima při průchodu světla mřížkou).

2.3 Michelsonův interferometr

Pomocí děliče svazku, dvou zrcadel a laserového světelného zdroje si sestavíte ,,Michelsonův interferometr“. Schéma je nakresleno na obrázku 6. Laserový svazek necháte dopadat pod úhlem 45° na polopropustné rozhraní v děliči svazku A. Paprsek se částečně odrazí (paprsek 1) a částečně projde (paprsek 2). Rovinnými zrcadly Z_1, Z_2 vrátíte oba paprsky (označené



Obrázek 6: Michelsonův interferometr

nyní jako $1'$ a $2'$) do stejného místa na rozhraní v děliči svazku. Část paprsku $1'$ jím projde a část paprsku $2'$ se na něm odrazí. Tyto dvě části svazku paprsků (označené $1''$ a $2''$) mohou spolu interferovat. Zachytíte je na stínítku, kde oba svazky musí dopadat do téhož bodu. Interferenční obrázek je velmi malý, zvětšíte si ho proto rozptylkou R vloženou mezi dělič svazku a stínítko. Potom na stínítku uvidíte soustavu tmavých a světlých proužků. Zrcadlo Z_2 je připevněno na posuvné zařízení skládající se z mikrometrického šroubu (1 malý dílek = 2 μm) a pákového převodu 1:10. Díky tomu jsou čísla na otočném bubínku mikrometrického šroubu mikrometry a jeden malý dílek je roven 200 nm. Posun zrcadla Z_2 o $\Delta x = \lambda/4$ zkrátí dráhu paprsku 2 o $\lambda/2$ a celý obraz se posune o šířku jednoho proužku. Identický obraz dostaneme zkrácením dráhy o λ, tj posunutím zrcadla o $\lambda/2$. Pro vlnovou délku světla tedy platí

$$\lambda = \frac{2\Delta x}{N}$$

kde N je počet proužků prošlých přes nějaký referenční bod na stínítku.

3 Pracovní úkoly

1. Bonus: spočítejte hodnotu konstanty C u kruhového otvoru pro 4. a 5. tmavý kroužek
2. Rozšiřte svazek laseru pomocí dvou spojek (+250 a +50)
3. Změřte průměr tří nejmenších kruhových otvorů pomocí Fraunhoferova ohybu světla z He-Ne Laseru vlnové délky 594 nm a pomocí měřícího mikroskopu - tato měření srovnejte mezi sebou. Které měření je přesnější? (Mějte na paměti, že pokud srovnáváte přesnost dvou měření, musíte mít u obou stejné množství naměřených dat) Doporučené množství naměřených dat je 5 hodnot pro každý otvor.
4. Změřte 5 šířek štěrbiny (šířka nastavitelná šroubem) pomocí Fraunhoferova ohybu světla z He-Ne Laseru vlnové délky 594 nm a pomocí indikátorových hodinek, které se dotýkají šroubu. Místo prostého průměrování naměřených hodnot použijte ve zpracování postupnou metodu. Výsledky z indikátorových hodinek a interference srovnejte. Pro jaké šířky štěrbiny je výhodnější měření interferencí a pro jaké indikátorovými hodinkami?
5. Změřte pomocí He-Ne laseru 543 nm (zelený laser) mřížkovou konstantu optické mřížky a srovnejte s hodnotou uvedenou na mřížce.
6. Pomocí mřížky a goniometru změřte vlnovou délku hlavních spektrálních čar Rtuťové výbojky.

7. Pomocí He-Ne laseru 594 nm, dvou rovinných zrcadel a děliče svazku (Abbeho kostka) sestavte Michelsonův interferometr a změřte vlnovou délku světla laseru.

4 Poznámky

1. **Upozornění:**

   Laserové světlo škodí zraku. Nesmíte nikdy hledět pouhým okem proti laserovému paprsku, a to ani z větší vzdálenosti, ani přes soustavu čoček a zrcadel. Všechny zjevy pozorujte pouze na stínítku.

Reference

[1] Petržílka: Fyzikální optika, Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1952.

[2] Friš, Timoreva: Kurs fyziky, díl III, NČSAV, Praha, 1954.

[3] Krauford:Volny, Nauka, 1974; ruský překlad 3. dílu Berkleyského kurzu fyziky Crawford F. S.: Waves.

[4] Sergey Kiselev, Tanya Yanovsky-Kiselev: Single-Slit Difraction. `http://www.phys.hawaii.edu/~teb/optics/java/slitdiffr/`, [cit. 03. 04. 2009]

[5] Blum, Roller: Physics - Volume 2 - Electricity Magnetism and Light, Holden-Day, San Fransisco, 1982