Řešení 2. zadané úlohy - Jakub Kákona

1. Výpočet pomocí Jordanova kanonického tvaru

   Víme, že vlastní čísla matice A jsou kořeny charakteristického polynomu

   $det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 2)$

   Vlastní čísla potom jsou $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2$.

   Dvojka je algebraicky násobným kořenem, proto může mít i geometrickou násobnost větší než 1.

   $$C\lambda_2 3 = dimA - h(\lambda I - A) = 3 - h \begin{bmatrix} 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \Rightarrow J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   Geometrická násobnost je proto také 2.

   Výpočet vlastních vektorů náležících vlastním číslům.

   $$(\lambda_1 I - A)v_1 = 0 \begin{bmatrix} 0 & -4 & -10 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   $$(\lambda_2 I - A)v_2 = 0 \begin{bmatrix} 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   $$(\lambda_3 I - A)v_3 = 0 \begin{bmatrix} 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Transformační matice vytvořená z vlastních vektorů

   $$P = [v_1, v_2, v_3] \begin{bmatrix} 1 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Její inverze je

   $$P^{-1} = [v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   $$e^{At} = Pe^{At}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

   $$= \begin{bmatrix} e^t & -4e^t + 4e^{2t} & -10e^t + 10e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 0 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

   Metoda s použitím Laplaceovy transformace:

   $e^{At} = L^{-1}(sI - A)^{-1}$

   $$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & -4 & -10 \\ 0 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s-2)^2} \begin{bmatrix} (s-2)^2 & -4(s-2) & -10(s-2) \\ 0 & (s-1)(s-2) & 0 \\ 0 & 0 & (s-1)^2 \end{bmatrix}^{-1} =$$

   $$= \begin{bmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \frac{1}{s-1} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \frac{1}{s-2}$$

Z toho pak

$$e^{At} = L^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \frac{1}{s-1} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \frac{1}{s-2} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

2. Dosazením definičních matic systému získáme rovnice tvaru: $\dot{x} = Ax, y = Cx$ Provedením Laplaceovy transformace pak $sX - x_0 = AX, Y = CX$

   Z toho vyjádříme $X = (sI - A)^{-1}x_0, Y = C(sI - A)^{-1}x_0$.

   $$Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{-s}{(s+1)^2} & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix} x_0$$

   $L\{(te^{-t})\} = \frac{-s}{(s+1)^2}$

   $$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix} x_0$$

   Stav $x(0)$ pro který bude platit požadovaná podmínka je $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. Požadavkem je konstantní stav x_0 proto dosadíme: $x_0 = Ax_0 + Bu(k)$ z toho $(I - A)x_0 = Bu(k)$

   $$X = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$

   $$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k) \rightarrow u(k) = 1(k)$$

   Potřebná sekvence vstupů pro splnění podmínek odpovídá jednotkovému skoku.

4. Řešením charakteristického polynomu matice A získáme její vlastní čísla. Jsou ale ovšem ryze komplexní $\lambda_1 = -i, \lambda_2 = +i, \lambda_{34} = 0$.

   Matice vlastních vektorů proto nabývá tvaru: $P = \begin{bmatrix} -0.3162 & -0.3162 & 0 & 0 \\ 0 + 0.3162i & 0 - 0.3162i & 0 & 0 \\ 0 + 0.6325i & 0 - 0.6325i & 1 & 1 \\ 0.6325 & 0.6325 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   Matici podobnou matici A pak získáme z definice

   $\tilde{}A = PAP^{-1}$