

Řešení 9. zadané úlohy - Jakub Kákona

- Potřebujeme zjistit jednotlivá vlastní čísla uzavřené smyčky pro jednotlivé matice F popisující zpětnou vazbu:

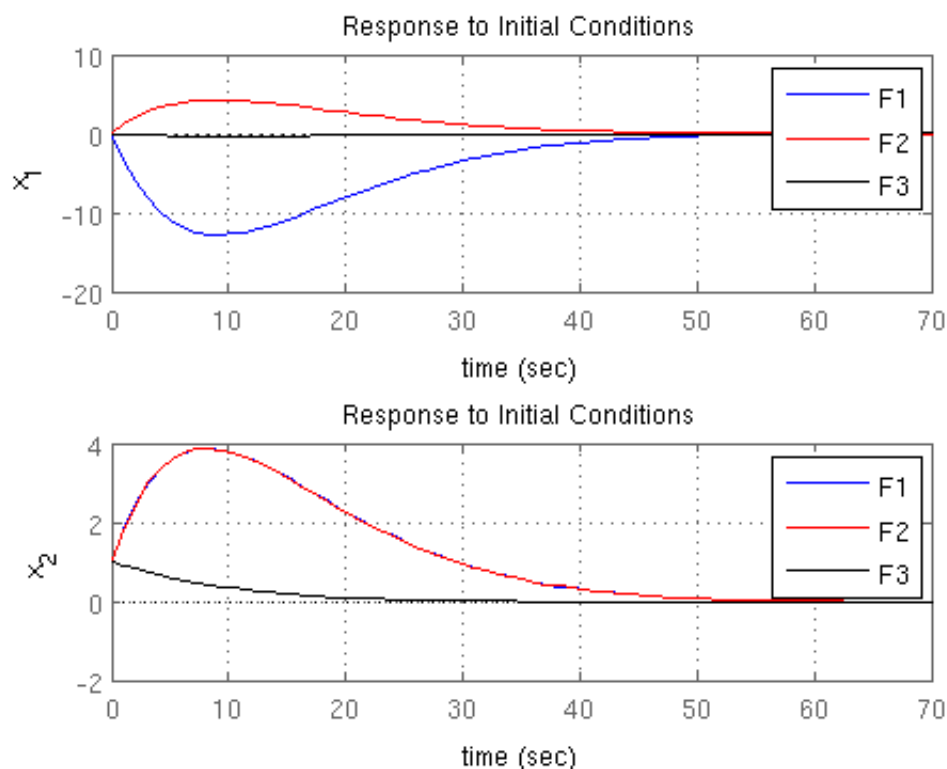
$$\det[\lambda I - (A + BF_1)] = \lambda^2 + 0,205\lambda + 0,01295 = (\lambda - 0,1025 + 0,0494j)(\lambda - 0,1025 - 0,0494j) \quad (1)$$

$$\det[\lambda I - (A + BF_2)] = \lambda^2 + 0,2053\lambda + 0,01295 = (\lambda - 0,1026 + 0,0492j)(\lambda - 0,1026 - 0,0492j) \quad (2)$$

$$\det[\lambda I - (A + BF_3)] = \lambda^2 + 0,205\lambda + 0,01295 = (\lambda - 0,1025 + 0,0494j)(\lambda - 0,1025 - 0,0494j) \quad (3)$$

Vidíme, že systém má pro všechny matice F opravdu stejná vlastní čísla. Drobná odchylka v případě matice F_2 je pravděpodobně jenom důsledek zaokrouhlovací chyby.

Vykreslíme grafy odezvy na počáteční podmínky.



Obrázek 1: Odezva stavů x_1 a x_2 na zadané počáteční podmínky

A vidíme, že odezvy jsou pro jednotlivé realizace systému značně rozdílné.

- Spočítáme matici říditelnosti systému:

$$C = [B, AB, A^2B, A^3B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -2 & 13 & -4 & 41 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Protože hodnost této matice je 4, tak systém je úplně říditelný. Ještě ověříme, zda je říditelný i pouze jedním vstupem.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow h(C_1) = 4 \quad (5)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 1 & 4 & 13 & 41 \end{bmatrix} \rightarrow h(C_2) = 4 \quad (6)$$

Vidíme, že i obě dílčí matice říditelnosti mají plnou hodnost, systém je proto říditelný i jedním ze vstupů.

Pro další postup zvolíme jedno-vstupovou realizaci:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 1 & 4 & 13 & 41 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Nyní hledáme matici F_c která umožní splnit zadaný požadavek na vlastní čísla.

Hledáme tedy takové prvky matice aby kořeny charakteristického polynomu byly rovny zadaným vlastním číslům:

$$\det[\lambda I - (A_c + B_c F_c)] = (\lambda + 1 + j)(\lambda + 1 - j)(\lambda + 2 + j)(\lambda + 2 - j) \quad (8)$$

Řešíme proto rovnici

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 - \lambda^3 d + 3\lambda^2 - \lambda^2 c - \lambda - \lambda b - 1 - a = (\lambda + 1 + j)(\lambda + 1 - j)(\lambda + 2 + j)(\lambda + 2 - j) \quad (9)$$

Úpravou výrazu a srovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin získáme řešení:

$$a = -11, b = -19, c = -12, d = -10 \quad F_c = \begin{bmatrix} -11 & -19 & -12 & -10 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Hledanou matici F pak získáme jako:

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & -19 & -12 & -10 \end{bmatrix} \quad (11)$$

3. Zadání dosadíme do Riccatiho rovnice

$$A^T P_c + P_c A - P_c B R^{-1} B^T P_c + Q = 0, P_c = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}. \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (13)$$

Řešením této maticové rovnice dojdeme k soustavě rovnic

$$2b - a^2 + 1 = 0 \quad (14)$$

$$a - ab + c = 0 \quad (15)$$

$$2b - b^2 = 0 \quad (16)$$

$$(17)$$

Řešení této soustavy pak jsou:

$$a = \pm 1, \pm \sqrt{5} \quad (18)$$

$$b = 0, 0, 2, 2 \quad (19)$$

$$c = \pm 1, \pm \sqrt{5} \quad (20)$$

$$(21)$$

My ale potřebujeme aby matice $P_c = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ byla pozitivně definitní. To je splněno v případě, že $a > 0, ac - b^2 > 0$

Tyto podmínky jsou splněny v případě řešení $P_c = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 2 \\ 2 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$

Hledané optimální $u^*(t)$, které minimalizuje J najdeme z rovnice

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T P_c^* x(t) = \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (22)$$

4. Sestavíme matici pozorovatelnosti systému se zpětnou vazbou.

$$A^* = A + BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}, C^* = C + DF = \begin{bmatrix} 1 + a & b \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$O = \begin{bmatrix} C^* \\ C^* A^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + a & b \\ ab & 1 + a + b^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Aby vlastní čísla ve zpětné vazbě byla nepozorovatelná z výstupu y , tak matice pozorovatelnosti musí mít hodnotu rovnu 0.

To je splněno pro $a = -1, b = 0$. A hledaná matice F je:

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Zbývá ještě určit přenos při této realizaci systému

$$H_F(s) = C^*(sI - A^*)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1+a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = 1 \quad (26)$$

5. Je třeba nejdříve sestavit stavový popis systému:

Zvolíme si popis stavů $\theta = x_1, \dot{\theta} = x_2$

A víme, že

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} = u \quad (27)$$

Potom platí

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad \dot{x}_2 = -x_2 + u \quad (28)$$

Z toho získáme maticový stavový popis

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (29)$$

Z něj pak vytvoříme matici říditelnosti:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, h(C) = 2 \quad (30)$$

Protože matice má plnou hodnost, systém je říditelný.

Protože je požadováno umístění vlastních čísel do -2 . Tak charakteristický polynom musí být ve tvaru:

$$\det(\lambda I - (A + BF)) = (\lambda + 2)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 4\lambda + 2 \quad (31)$$

Musíme proto vyřešit rovnici

$$\lambda^2 + \lambda - \lambda b - a = \lambda^2 + 4\lambda + 2 \quad (32)$$

řešením je $a = -4, b = -3$. A matice stavové zpětné vazby má následující tvar

$$F = \begin{bmatrix} -4 & -3 \end{bmatrix} \quad (33)$$