Řešení 9. zadané úlohy - Jakub Kákona

1. Potřebujeme zjistit jednotlivá vlastní čísla uzavřené smyčky pro jednotlivé matice F popisující zpětnou vazbu:

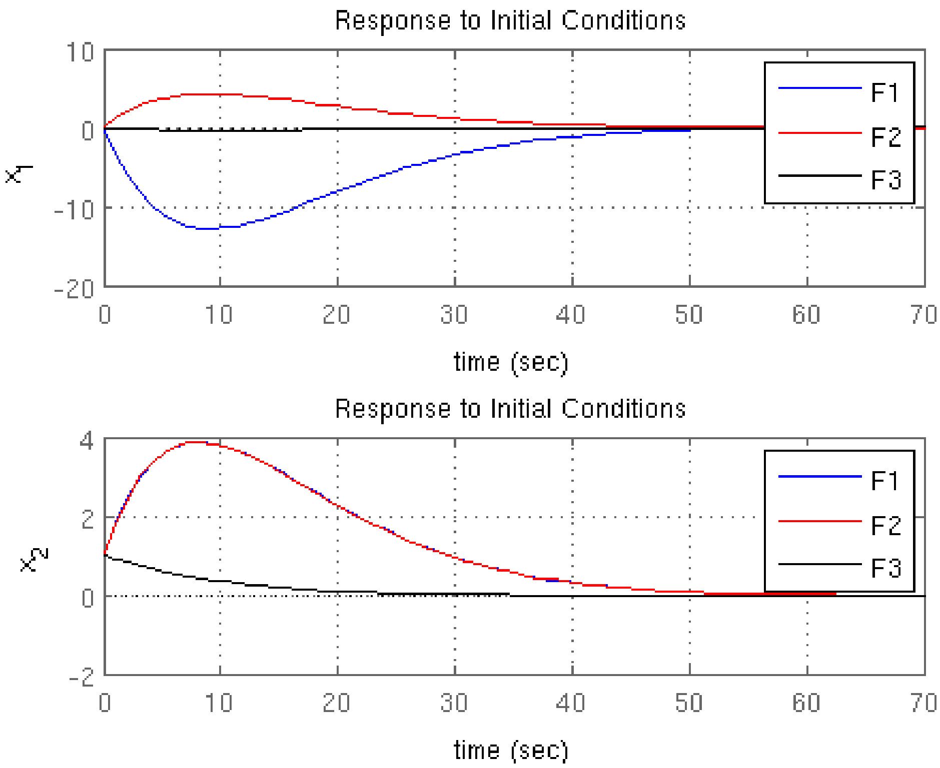
$$\det[\lambda I-(A+BF_1)] = \lambda^2+0,205\lambda+0,01295 = (\lambda-0,1025+0,0494j)(\lambda-0,1025-0,0494j) \quad (1)$$

$$\det[\lambda I-(A+BF_2)] = \lambda^2+0,2053\lambda+0,01295 = (\lambda-0,1026+0,0492j)(\lambda-0,1026-0,0492j) \quad (2)$$

$$\det[\lambda I-(A+BF_3)] = \lambda^2+0,205\lambda+0,01295 = (\lambda-0,1025+0,0494j)(\lambda-0,1025-0,0494j) \quad (3)$$

   Vidíme, že systém má pro všechny matice F opravdu stejná vlastní čísla. Drobná odchylka v případě matice F_2 je pravděpodobně jenom důsledek zaokrouhlovací chyby.

   Vykreslíme grafy odezvy na počáteční podmínky.



Obrázek 1: Odezva stavů x_1 a x_2 na zadané počáteční podmínky

   A vidíme, že odezvy jsou pro jednotlivé realizace systému značně rozdílné.

2. Spočítáme matici řiditelnosti systému:

$$C = \left[B, AB, A^2B, A^3B\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -2 & 13 & -4 & 41 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Protože hodnost této matice je 4, tak systém je úplně řiditelný. Ještě ověříme, zda je řiditelný i pouze jedním vstupem.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow h(C_1) = 4 \tag{5}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 1 & 4 & 13 & 41 \end{bmatrix} \rightarrow h(C_2) = 4 \tag{6}$$

Vidíme, že i obě dílčí matice řiditelnosti mají plnou hodnost, systém je proto řiditelný i jedním ze vstupů.

Pro další postup zvolíme jedno-vstupovou realizaci:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 1 & 4 & 13 & 41 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Nyní hledáme matici F_c] která umožní splnit zadaný požadavek na vlastní čísla.

Hledáme tedy takové prvky matice aby kořeny charakteristického polynomu byly rovny zadaným vlastním číslům:

$$\det[\lambda I - (A_c + B_c F_c)] = (\lambda + 1 + j)(\lambda + 1 - j)(\lambda + 2 + j)(\lambda + 2 - j) \tag{8}$$

Řešíme proto rovnici

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 - \lambda^3 d + 3\lambda^2 - \lambda^2 c - \lambda - \lambda b - 1 - a = (\lambda+1+j)(\lambda+1-j)(\lambda+2+j)(\lambda+2-j) \tag{9}$$

Úpravou výrazu a srovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin získáme řešení:

$$a = -11, b = -19, c = -12, d = -10 \qquad F_c = \begin{bmatrix} -11 & -19 & -12 & -10 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Hledanou matici F pak získáme jako:

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & -19 & -12 & -10 \end{bmatrix} \tag{11}$$

3. Zadání dosadíme do Riccatiho rovnice

$$A^T P_c + P_c A - P_c B R^{-1} B^T P_c + Q = 0, P_c = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}. \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{13}$$

Řešením této maticové rovnice dojdeme k soustavě rovnic

$$\begin{aligned} 2b - a^2 + 1 = & \; 0 && (14) \\ a - ab + c = & \; 0 && (15) \\ 2b - b^2 = & \; 0 && (16) \\ & && (17) \end{aligned}$$

Řešení této soustavy pak jsou:

$$\begin{aligned} a = & \; \pm 1, \pm\sqrt{5} && (18) \\ b = & \; 0, 0, 2, 2 && (19) \\ c = & \; \pm 1, \pm\sqrt{5} && (20) \\ & && (21) \end{aligned}$$

My ale potřebujeme aby matice $P_c = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ byla pozitivně definitní. To je splněno v případě, že $a > 0, ac - b^2 > 0$

Tyto podmínky jsou splněny v případě řešení $P_c = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 2 \\ 2 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$

Hledané optimální $u^*(t)$, které minimalizuje J najdeme z rovnice

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T P_c^* x(t) = \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{22}$$

4. Sestavíme matici pozorovatelnosti systému se zpětnou vazbou.

$$A^* = A + BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}, C^* = C + DF = \begin{bmatrix} 1+a & b \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$O = \begin{bmatrix} C^* \\ C^* A^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a & b \\ ab & 1+a+b^2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Aby vlastní čísla ve zpětné vazbě byla nepozorovatelná z výstupu y, tak matice pozorovatelnosti musí mít hodnost rovnu 0.

To je splněno pro $a = -1, b = 0$. A hledaná matice F je:

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Zbývá ještě určit přenos při této realizaci systému

$$H_F(s) = C^*(sI - A^*)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1+a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = 1 \tag{26}$$

5. Je třeba nejdříve sestavit stavový popis systému:
   Zvolíme si popis stavů $\theta = x_1, \dot{\theta} = x_2$
   A víme, že

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} = u \tag{27}$$

Potom platí

$$\dot{x_1} = x_2 \qquad \dot{x_2} = -x_2 + u \tag{28}$$

Z toho získáme maticový stavový popis

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{29}$$

Z něj pak vytvoříme matici řiditelnosti:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, h(C) = 2 \tag{30}$$

Protože matice má plnou hodnost, systém je řiditelný.

Protože je požadováno umístění vlastních čísel do -2. Tak charakteristický polynom musí být ve tvaru:

$$\det(\lambda I - (A + BF)) = (\lambda + 2)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 4\lambda + 2 \tag{31}$$

Musíme proto vyřešit rovnici

$$\lambda^2 + \lambda - \lambda b - a = \lambda^2 + 4\lambda + 4 \tag{32}$$

řešením je $a = -4, b = -3$. A matice stavové zpětné vazby má následující tvar

$$F = \begin{bmatrix} -4 & -3 \end{bmatrix} \tag{33}$$