

# Měření modulu pružnosti ve smyku a tahu

Jakub Kákona, kaklik@mlab.cz

19.11.2009

## Abstrakt

Pružné vlastnosti homogenního izotropního tělesa při malých deformacích plně určují dvě nezávislé materiálové konstanty, za které mohou být zvoleny např. modul pružnosti v tahu (Youngův modul)  $E$  a Poissonovo číslo  $\mu$  nebo modul pružnosti v tahu  $E$  a modul pružnosti ve smyku  $G$ . Jejich význam si vysvětlíme na dvou základních experimentech.

## 1 Úvod

1. Změřte závislost relativního délkového prodloužení  $\Delta l/l$  ocelového drátu na napětí při zatěžování a odlehčování drátu a sestrojte graf této závislosti. Vypočítejte metodou nejmenších čtverců modul pružnosti v tahu ocelového drátu.
2. Změřte závislost průhybu  $z$  na velikosti síly  $F$  při zatěžování i odlehčování ocelového nosníku a narýsujte graf této závislosti. Metodou nejmenších čtverců vypočítejte modul pružnosti v tahu.
3. V přípravě odvoďte vzorec pro plošný moment setrvačnosti obdélníkového průřezu šířky  $a$  a výšky  $b$ .
4. Změřte závislost úhlu zkroucení  $\varphi$  ocelového drátu na velikosti kroutícího momentu při postupném zvětšování a postupném zmenšování tohoto momentu. Výsledky měření vynesete do grafu. Metodou nejmenších čtverců vypočtete modul pružnosti ve smyku  $G$  drátu.
5. Na torzním kyvadle změřte moment setrvačnosti základního systému  $I_0$  a modul pružnosti ve smyku  $G$  ocelového drátu. Dobu torzních kmitů změřte postupnou metodou.
6. V přípravě odvoďte vzorce pro výpočet modulu pružnosti ve smyku  $G$  a momentu setrvačnosti základního systému torzního kyvadla  $I_0$ .

## 2 Úvod

### 2.1 Modul pružnosti v tahu

Při působení tažné síly na pružné homogenní těleso se jeho rozměr v ose síly prodlužuje podle vztahu.

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l},$$

Který nazýváme Hookův zákon. Konstanta  $E$  je určena jen vlastnostmi materiálu a nazývá se modul pružnosti v tahu nebo Youngův modul. Při protahování tělesa se však jeho rozměry kolmé k ose jeho prodloužení zkracují podle vztahu.

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = \mu \frac{\Delta l}{l}, \text{ resp. } \frac{\Delta r}{r} = \mu \frac{\Delta l}{l},$$

kde  $\mu$  je Poissonovo číslo (nezávislé na  $E$ ). Poissonovo číslo  $\mu$  je v intervalu  $\langle 0, 1/2 \rangle$ ; hodnotu  $1/2$  nabývá pro nestlačitelné materiály. Protože v našem případě platí

$$S = \pi d^2$$

a

$$F = mg$$

kde  $d$  je průměr drátu a  $m$  hmotnost závaží dostaneme po úpravě vztah

$$E = \frac{4mgl}{\pi d^2 \Delta l} \quad (1)$$

## 2.2 Modul pružnosti v tahu měřený z ohybu nosníku

Nosník známé délky  $L$  podepřený na obou koncích se při zátěži uprostřed prohýbá podle vztahu.

$$z(0) = -\frac{FL^3}{48EI}.$$

Kde  $I$  je plošný moment setrvačnosti určený profilem nosníku. Pro nosník obdélníkového průřezu je roven.

$$I = \frac{ab^3}{12}$$

Po sloučení obou výrazů a vyjádření  $E$  dostáváme

$$E = -\frac{mgL^3}{4ab^3}$$

## 2.3 Modul pružnosti ve smyku měřený statickou torzí

Při zatížení drátu momentem síly

$$M = 2mgr$$

Se jeho konec bude stáčet o úhel  $\Phi$  Tento úhel bude záviset na momentu síly a poloměru drátu. Tím je určen modul pružnosti ve smyku  $G$

$$G = \frac{2mL}{\pi R^4 \Phi}$$

Po dosazení za moment síly dostáváme výraz

$$G = \frac{2rgmL}{\pi R^4 \Phi}$$

## 2.4 Modul pružnosti ve smyku měřený torzním kyvadlem

Stočením drátu o úhel  $\Phi$  bude kyvadlo působit momentem síly o velikosti

$$M = K\Phi$$

kde  $K$  je direkční moment kyvadla, pro který platí

$$K = \frac{G\pi R^4}{2L}$$

Kde  $R$  je poloměr drátu a  $L$  jeho délka. Tento moment bude stáčet drát zpět do rovnovážné polohy a tím vznikne kmitavý pohyb s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$$

Kde  $I$  je moment setrvačnosti kyvadla. Z vlastností  $K$  plyne vztah

$$\frac{I_1}{T_1^2} = \frac{I_2}{T_2^2}$$

Kde  $I_1$  a  $I_2$  jsou momenty setrvačnosti kyvadla pro dvě různé vzdálenosti závaží od osy.

## 3 Postup měření

Měření modulu pružnosti v tahu jsme měřili napínáním svisle pověšeného drátu závažími o hmotnosti 101g průtah drátu jsme zjistili pomocí měřících hodin. Naměřené hodnoty ukazuje tabulka 3.

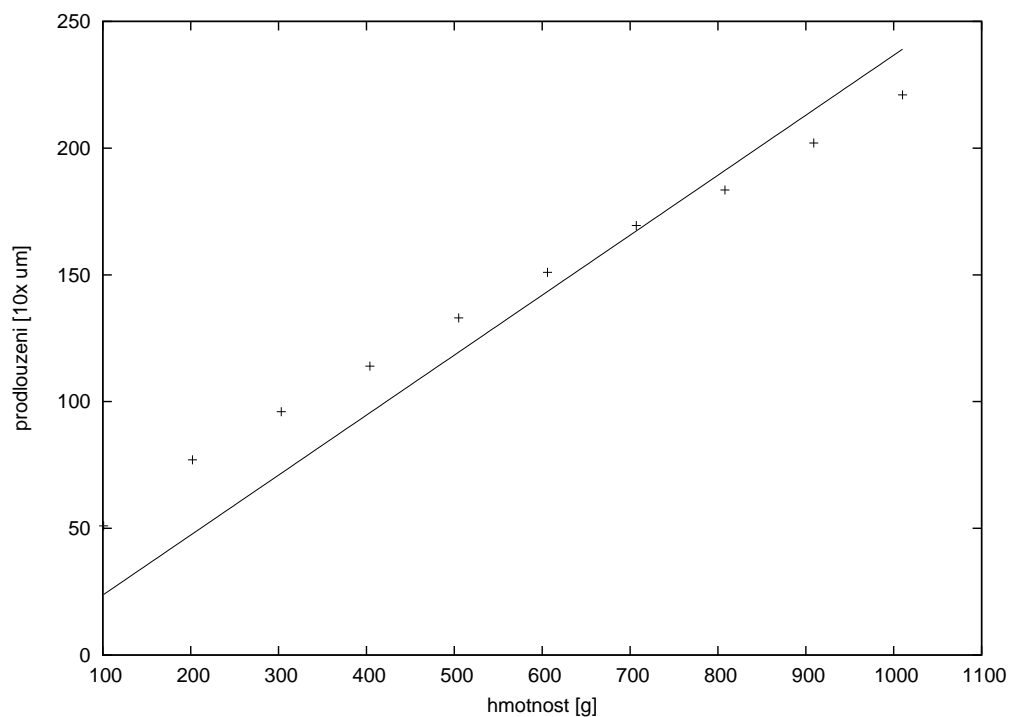
počet závaží	hmotnost[g]	zatezování[10um]	odlehcování[10um]
1	101	51	59
2	202	77	81
3	303	96	100
4	404	114	118
5	505	133	135
6	606	151	153
7	707	169,5	170
8	808	183,5	187
9	909	202	202
10	1010	221	221

Tabulka 1: Prodlužování a zkracování drátu

Proložení naměřených dat funkcí 1 jsme dostali hodnotu  $E = (1.59619e + 11 \pm 6.539e + 09)$  Pa.

Proložení ukazuje graf 1 a 2.

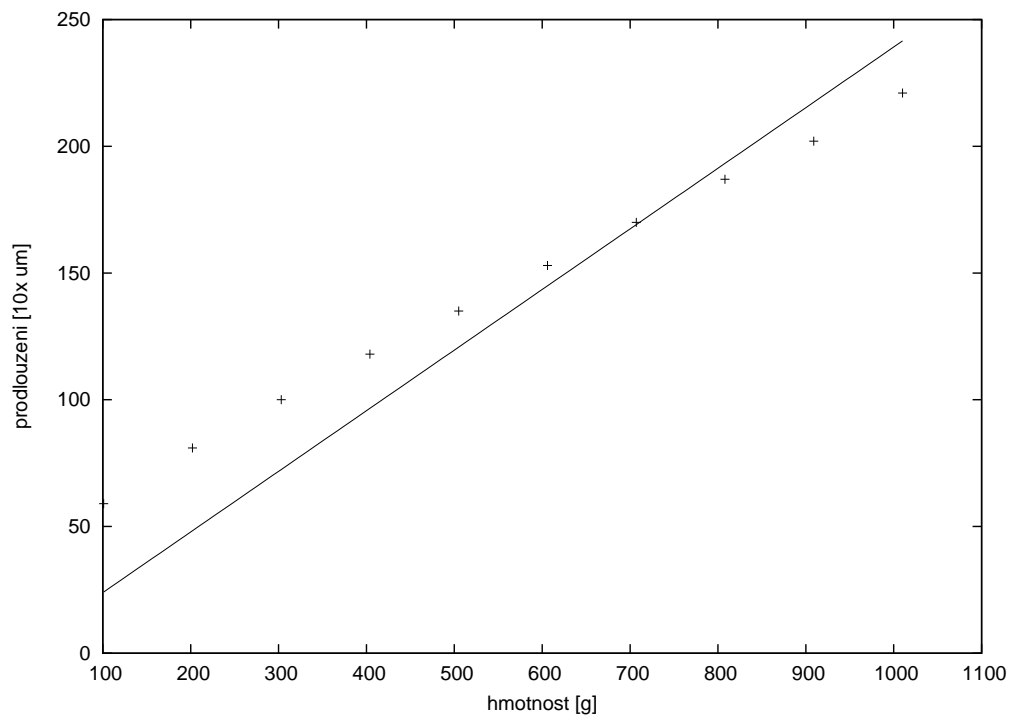
Průhyb nosníku jsme měřili zatěžováním hranolu o rozměrech 498x10,1x4,1 mm. Hodnotu jsme měřili mikroskopem v prostřední části. Naměřené hodnoty uvádí tabulka 2.



Obrázek 1: prodloužení drátu délky 1,15m v závislosti na zátěži

zatez[g]	pruhyb[mm]	pruhyb[mm]
101	2,53	0,06
202	5,05	0,13
303	7,58	0,19
404	10,1	0,25
505	12,63	0,32
606	15,15	0,38
707	17,68	0,44
808	20,2	0,51
909	22,73	0,57
1010	25,25	0,63

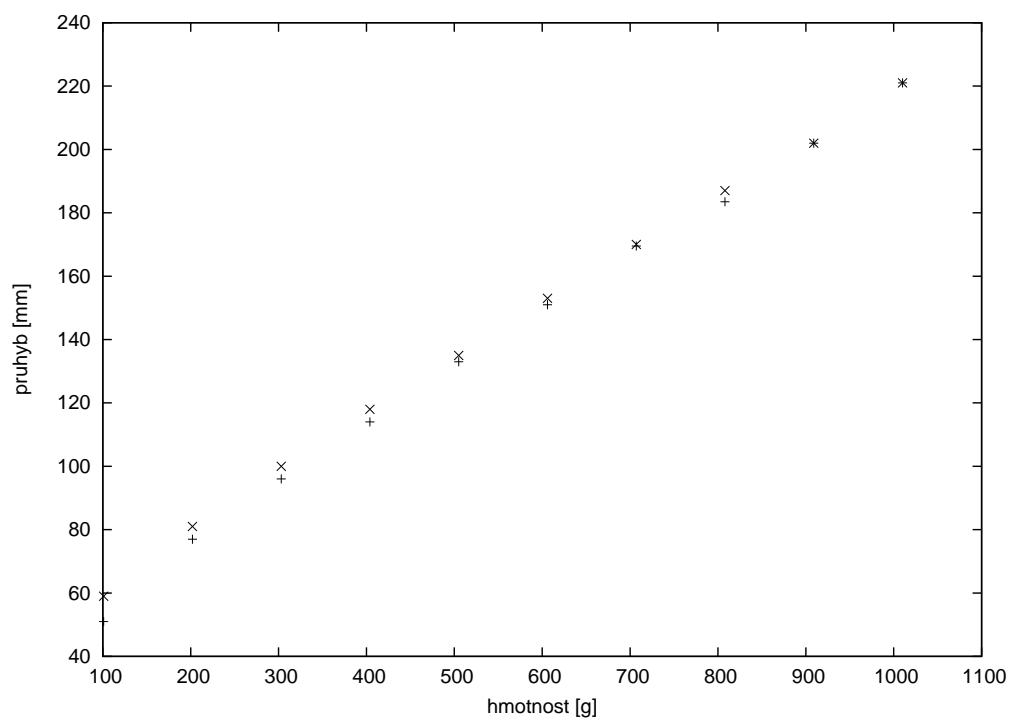
Tabulka 2: Pruhyb nosníku



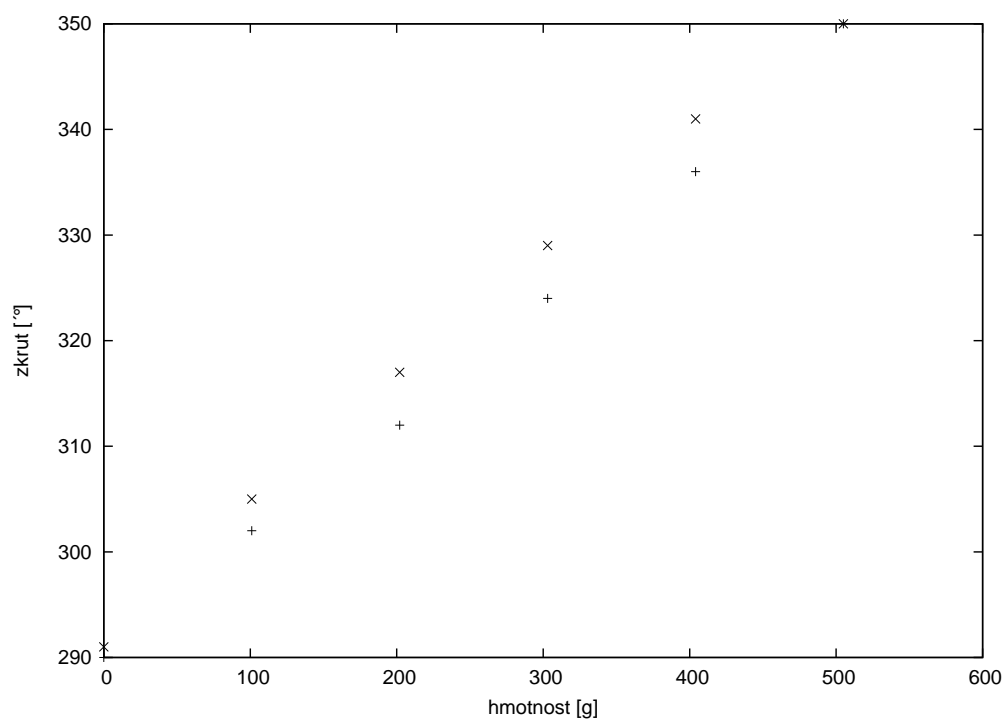
Obrázek 2: prodloužení drátu délky 1,15m v závislosti na zátěži během odlehčování

hmotnost	Zatezovani [ ]	Odlehcovani [ ]
0	290	291
101	302	305
202	312	317
303	324	329
404	336	341
505	350	350

Tabulka 3: Statická torze drátu



Obrázek 3: Průhyb nosníku



Obrázek 4: Torze drátu

Grafické vyjádření je v grafu 3.

Zde nám vyšla hodnota modulu pružnosti  $E = 165,66$  GPa.

Měření modulu pružnosti ve smyku jsme provedli zkrutem drátu delky 665mm, a průměru 1,99mm naměřené výsledky jsou v tabulce 3 a grafu 4.

Po výpočtu nám vyšel modul pružnosti ve smyku 91 GPa.

Posledním měřením bylo požití torzního kyvadla k měření modulu pružnosti ve smyku. Zde jsme zvolili dvě různé vzdálenosti závaží a změřili pro ně periodu kmitů. Pro vzdálenost závaží 31mm nám vyšla perioda 5,91s a pro vzdálenost 222mm 16,8s. Po zjištění potřebných momentů setrvačnosti již bylo možné vypočítat hodnotu modulu pružnosti ve smyku 83,2 GPa.

## 4 Diskuse

Při měření bylo poměrně komplikované určit správné rozměry měřených profilů. zvláště pak výšku nosníku kde bylo třeba mikrometrem měřit přesně kolmo k jeho ose, tuto jsem vyhodnotil jako nepřesnou a výšku se pokusil změřit posuvným měřítkem o kterém mám ale nyní podezření, že mohlo proměřovat až o 0,2mm, což je hodnota kterou bych od měřícího prostředku tohoto typu nečekal. Výsledkem je, že měření jsou zatížena poměrně neznámou chybou určení rozměrů. Na druhou stranu si ale myslím, že výsledné moduly pružnosti vyšly v celku reálné, takže konečná chyba nebude velká.

## 5 Závěr

Z výsledků měření vidíme že hodnota modulu pružnosti v tahu se u ocelových materiálů pohybuje okolo 160 GPa zatímco, modul pružnosti ve smyku má menší hodnoty v oblasti 80 GPa. Tento fakt vysvětluje známou snahu konstruktérů ocelové díly namáhat pouze na tah a vyhnout se namáhání na zkrut a stříh.

## Reference

- [1] Zadání úlohy 2 - Měření modulu pružnosti v tahu a modulu pružnosti ve smyku  
<http://praktika.fjfi.cvut.cz/Pruznost/>