

# Měření měrného náboje elektronu

**Pomůcky:** Zdroj napětí 300 V a 2 kV, zdroj proudu, katodová trubice firmy Leybold-Heraeus, Helmholtzovy cívky, ampérmetr, voltmetr, obrazovka s cívkou,

## 1 Základní pojmy a vztahy

Měrným nábojem elektronu nazýváme poměr náboje elektronu k jeho hmotnosti. V soustavě SI má rozměr C/kg. V následujícím textu budou popsány dvě metody měření měrného náboje elektronu, a to pomocí fokuzace svazku elektronů v obrazovce podélným magnetickým polem a poloměru zakřivení dráhy elektronů v příčném magnetickém poli.

### A. Měření $e/m$ v podélném magnetickém poli

Tato metoda měření  $e/m$  je založena na účinku podélného magnetického pole na divergující svazek elektronů, které vycházejí po urychlení z malého otvoru v anodě osciloskopické obrazovky. Lorentzova síla  $F$ , která působí na elektron pohybující se rychlostí  $v$  v magnetickém poli o mg. indukci  $B$ , je dána vztahem

$$\vec{F} = e (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (1)$$

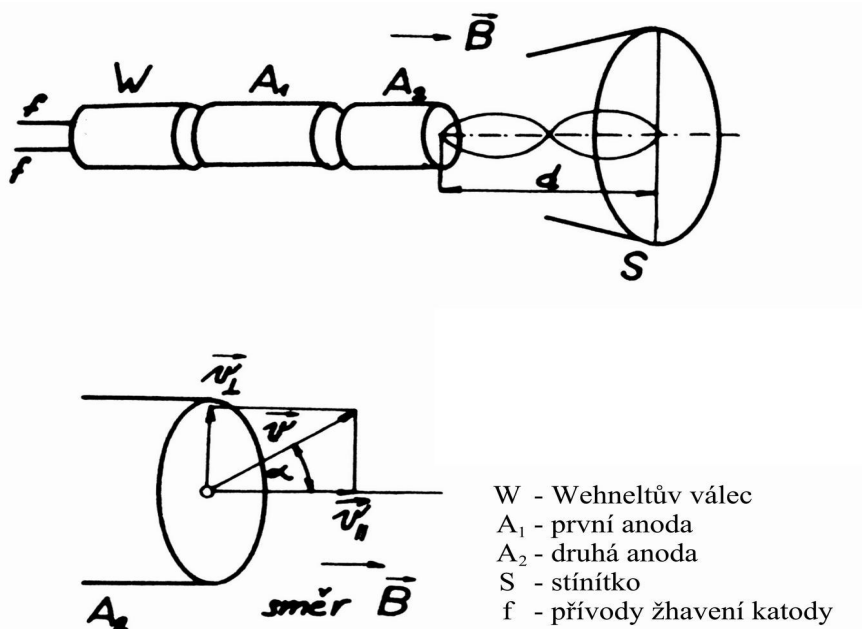
Obecně lze vektory rychlostí jednotlivých elektronů divergujícího svazku rozložit na kolmou  $\vec{v}_\perp$  a podélnou  $\vec{v}_\parallel$  složku vzhledem ke směru magnetického pole. Pro rychlost ve směru pole je (viz obrázek 1)

$$\vec{v}_\parallel = v \cos \alpha \quad (2)$$

a pro rychlost kolmou na směr pole je

$$\vec{v}_\perp = v \sin \alpha, \quad (3)$$

kde  $\alpha$  je úhel, který svírá  $\vec{v}$  s  $\vec{B}$ .



Obrázek 1: Uspořádání elektronově optické soustavy obrazovky a trajektorie elektronů při fokuzaci podélným magnetickým polem

Vyšetříme vliv magnetického pole na každou z těchto složek zvlášť. Vztah (1) lze tedy rozepsat do tvaru

$$\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel = e \left( \vec{v}_\perp \times \vec{B} \right) + e \left( \vec{v}_\parallel \times \vec{B} \right). \quad (4)$$

Druhý člen je nulový ( $\vec{v}_\parallel \parallel \vec{B}$ ) a magnetické pole působí tedy na elektrony silou, která je kolmá na  $\vec{v}_\perp$  i  $\vec{B}$  a její velikost je

$$F_\perp = ev_\perp B. \quad (5)$$

Velikost rychlosti  $\vec{v}_\perp$  zůstává konstantní a elektron opisuje kružnici. Její poloměr  $r$  lze spočítat z podmínky

$$ev_\perp B = \frac{mv_\perp^2}{r}. \quad (6)$$

Tedy

$$r = \frac{v_\perp}{B \frac{e}{m}} \quad (7)$$

a

$$v_\perp = \frac{e}{m} Br. \quad (8)$$

Doba  $T$ , za kterou elektron opíše celou kružnici, je

$$T = \frac{2\pi r}{v_\perp} = \frac{2\pi}{\frac{e}{m} B} \quad (9)$$

a nezávisí na poloměru  $r$ . Současně ale elektrony vykonávají postupný pohyb rychlostí  $\vec{v}_\parallel$ . Výsledná dráha je spirála. Rychlost  $v_\parallel$  závisí na urychlovacím napětí  $U$  a na rychlosti, kterou byly elektrony emitovány ze žhavé katody. Proběhnutím potenciálním rozdílem  $U \approx 1\,000$  V získávají elektrony kinetickou energii 1 keV a rychlost, kterou lze spočítat z podmínky

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU \quad (10)$$

a proti které lze počáteční rychlost zanedbat. Budeme proto předpokládat, že rychlost všech elektronů vyletujících otvorem v anodě je stejná a pro její velikost platí

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \quad (11)$$

Svazek je však jen mírně rozbíhavý, a tak můžeme

$$v_\parallel = v \cos \alpha \quad (12)$$

aproximovat rovností

$$v_\parallel = v. \quad (13)$$

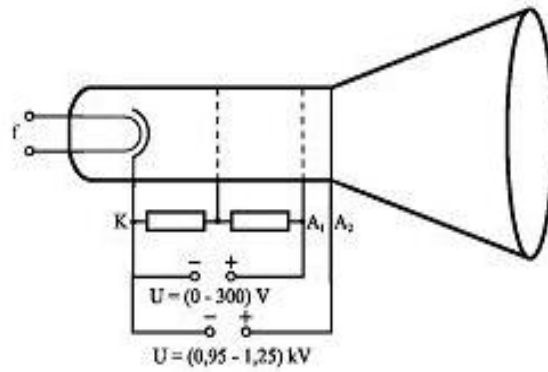
Z uvedeného rozboru plyne, že všechny elektrony vyletující z jednoho bodu opíšou svou dráhu za stejný čas  $T$  a setkají se na ose (jsou fokuzovány) paralelně se směrem magnetického pole  $\vec{B}$  ve vzdálenosti

$$l = vT = \frac{2\pi v}{\frac{e}{m} B}. \quad (14)$$

Toto platí pro každý bod plochy otvoru v anodě. Na stínítku umístěném právě ve vzdálenosti  $l$  od otvoru anody vznikne ostrý obraz tohoto otvoru. Z (10) a (14) plyne

$$l^2 = \frac{8\pi^2 U}{B^2 \frac{e}{m}}, \quad (15)$$

ze kterého lze vyjádřit



Obrázek 2: Schéma zapojení obrazovky

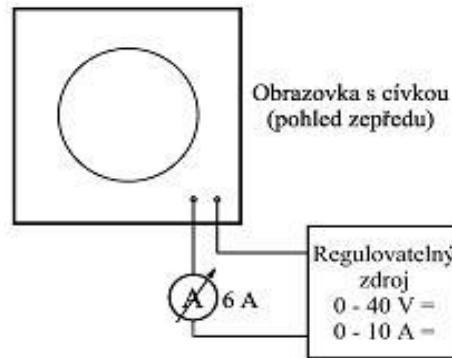
$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U}{B^2 l^2} \quad (16)$$

Měříme-li  $U$  ve voltech a  $B$  v teslách, vychází  $e/m$  v C/kg.

### Popis použitého experimentálního uspořádání

Uspořádání experimentu a zapojení přístrojů je na obrázku 2, obrázek 3 a obrázek 4.

Při měření se používá obrazovka, která má ovšem pevnou vzdálenost  $d$  stínítka od druhé anody ( $l = 0,249$  m). Aby  $d = l$ , musí být možné vhodným způsobem nastavit intenzitu magnetického pole. To se provádí změnou proudu  $I$  cívky, která toto pole vytváří. Cívka přesahuje obrazovku na obou koncích tak, aby bylo možno považovat pole uvnitř za homogenní. Intenzitu magnetického pole vypočteme ze vztahu



Obrázek 3: Zapojení napájecí cívky

$$B = \mu_0 \frac{N}{l'} I \quad (17)$$

kde  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Wb.A<sup>-1</sup>.m<sup>-1</sup> je permeabilita vakua,  $I$  je proud v ampérech tekoucí cívkou,  $l' = 0,381$  m je délka cívky a  $N = 174$  je počet závitů cívky.

Protože při rychlostech elektronů odpovídajících energii 1 keV je  $m/m_0 = 1,002$ , nemusíme uvažovat relativistické korekce.

### B. Měření $e/m$ v kolmém magnetickém poli

Z rozžhavené katody katodové trubice jsou emitovány elektrony, jejichž počáteční energie je malá ve srovnání s přírůstkem kinetické energie, který získají v elektrickém poli mezi katodou a anodou. Lze tedy předpokládat, že všechny elektrony dopadají na anodu se stejnou kinetickou energií.

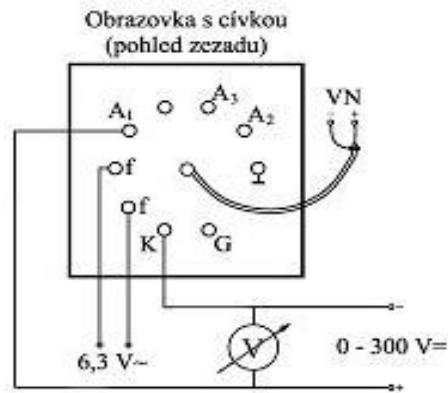
Použijeme-li anodové napětí řádově  $U \approx 100$  V, platí v tomto případě pro kinetickou energii elektronů nerelativistický vztah (viz poznámka 2)

$$\frac{1}{2} m v^2 = eU, \quad (18)$$

kde  $m$ ,  $e$ ,  $v$  jsou hmotnost, náboj a rychlost elektronu.

Z rovnice (18) plyne, že rychlost elektronů je rovna

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \quad (19)$$



Obrázek 4: Zapojení napájení obrazovky

a s touto rychlostí vletují elektrony otvorem v anodě do magnetického pole nacházejícího se za anodou. V magnetickém poli působí na elektrony Lorentzova síla

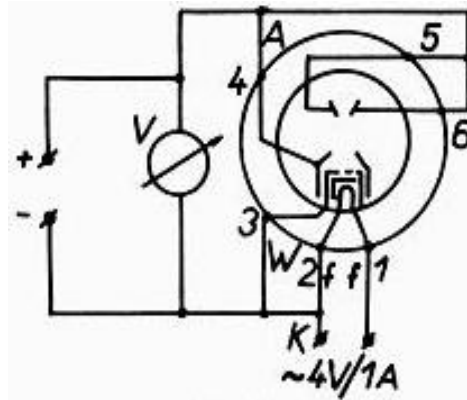
$$\vec{F}_L = e(\vec{v} \times \vec{B}), \quad (20)$$

kteřá vyvolá zakřivení jejich trajektorie. Volíme-li geometrii pokusu tak, aby směr vektoru rychlosti  $\vec{v}$  elektronů byl neustále kolmý na směr vektoru  $\vec{B}$  magnetické indukce, bude trajektorií elektronu kružnice ležící v rovině kolmé na směr magnetického pole.

Lorentzova síla určená vztahem (20) se projevuje jako dostředivá síla. Pro velikosti těchto sil platí rovnost

$$\frac{mv^2}{r} = evB, \quad (21)$$

kde  $r$  je poloměr kruhové trajektorie elektronu.



Obrázek 5: Principiální schéma zapojení katodové trubice firmy Leybold-Heraeus

Užitím vztahu (18) a (21) dostáváme hledaný vztah pro měrný náboj elektronu  $e/m$ . Platí

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{r^2 B^2}. \quad (22)$$

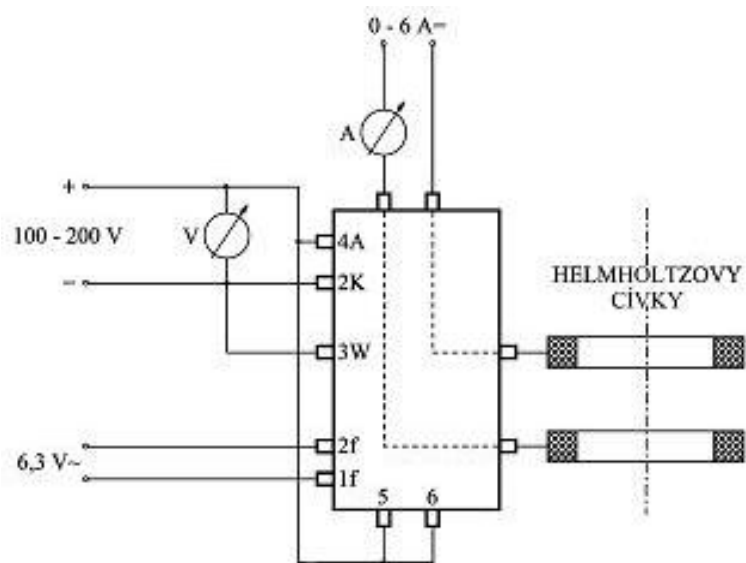
Z poslední rovnice je vidět, že k určení veličiny  $e/m$  je zapotřebí změřit hodnotu urychlujícího napětí mezi katodou a anodou, poloměr kruhové trajektorie a hodnotu magnetické indukce.

K určení hodnoty  $e/m$  použijeme katodové trubice vyráběné firmou Leybold-Heraeus. Zapojení trubice je ukázáno na obrázku 5. Dále na obrázku 6 je ukázáno připojení přívodové skřínky k vnějším zdrojům napětí.

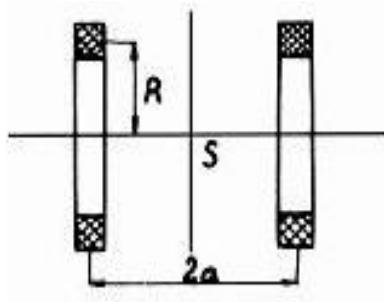
Katodová trubice se skládá ze skleněné baňky o průměru 175 mm, ve které je excentricky uložen systém elektrod. Systém elektrod se skládá

- z katody s nepřímým žhavením  $f$  (1, 2),
- z Wehneltova válce  $W$  (3),
- z kuželovité anody  $A$  (4),
- z dvojice vychylovacích destiček (5, 6) (Ablenkplatten) umístěných před anodou.

Systém elektrod je šestipólovou patičkou připojen k přívodové skřínce na podstavci s Helmholtzovými cívkami. V přívodové skřínce jsou ochranné odpory.



Obrázek 6: Schéma zapojení přívodové skříňky k vnějším zdrojům napětí



Obrázek 7: Geometrie Helmholtzových cívek

Jmenovité žhavicí napětí (1, 2) je 6,3 V, anodové napětí (2, 4) volíme mezi 100 - 200 V, Wehneltův válec udržujeme na potenciálu katody. Vychylovací destičky (5, 6) spojíme s anodou.

Elektronový svazek vyletuje otvorem v anodě do prostoru, ve kterém je magnetické pole a který je naplněn velmi zředěným plynem (vodík). Atomy plynové náplně se při srážkách s elektrony svazku excitují ze základního energetického stavu do stavů s vyšší energií. Při deexcitaci pak atomy emitují viditelné záření. Tímto způsobem se zviditelní kruhová dráha elektronového svazku a lze měřit její průměr ( $2r$ ). Tak se určí jedna z veličin potřebných k určení  $e/m$  (viz vztah (22)). Použitá hodnota urychlovacího napětí  $U$  se odečte na voltmetru  $V$ .

K vytvoření magnetického pole se používá Helmholtzových cívek. Prochází-li cívkami proud  $I$ , pak je ve středu souměrnosti obou cívek (bod  $S$  na obrázek 7) buzeno magnetické pole o indukci

$$B = \mu_0 \frac{NR^2}{(R^2 + a^2)^{3/2}} I = kI, \quad (23)$$

kde  $\mu_0$  je permeabilita vakua,  $N$  počet závitů jedné cívky,  $R$  je střední poloměr cívek a  $2a$  je jejich vzdálenost.

Je-li vzdálenost cívek  $2a$  alespoň přibližně rovna jejich poloměru  $R$ , pak vztah (23) platí s dostatečnou přesností v rozsáhlé oblasti v rovině souměrnosti obou cívek. Požadovaný předpoklad je u použitých cívek splněn, nebo  $2a = 15$  cm,  $R = 15$  cm. Dále  $N = 130$  závitů,  $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$  V.s.A<sup>-1</sup>.m<sup>-1</sup>. Dosadíme-li tyto údaje do vztahu (23), můžeme určit číselnou hodnotu konstanty  $k$ .

$$k = \mu_0 \frac{NR^2}{(R^2 + a^2)^{3/2}} = 0,781 \cdot 10^{-3} T \cdot A^{-1}. \quad (24)$$

Určením konstanty  $k$  bylo převedeno určení indukce  $B$  na změření velikosti proudu  $I$  protékajícího cívkami. Tato velikost se měří ampérmetrem  $A$  na obrázku 6.

Užitím rovnosti (23) lze vztah (22) přepsat na konečný tvar

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{k^2 I^2 r^2}, \quad (25)$$

kde konstanta  $k$  má hodnotu danou vztahem (24). Při měření si hodnoty veličin  $U$ ,  $I$  volíme a průměr  $2r$  trajektorie elektronů odečítáme na zrcadlovém měřítku umístěném těsně za katodovou trubicí. Užitím vztahu (25) pak vypočítáme hledanou hodnotu měrného náboje elektronu.

## 2 Pracovní úkoly

1. Sestavte úlohu pro měření  $e/m$  fokuzací podélným magnetickým polem a proveďte měření pro čtyři různé hodnoty urychlovacího napětí  $U$  v rozmezí 950 - 1250 V. Pomocné napětí na  $A_1$  (obrázek 4) volte 140 V.
2. Změřte měrný náboj elektronu  $e/m$  ze zakřivení dráhy elektronů v kolmém magnetickém poli. Měření proveďte pro pět dvojic urychlovacího napětí a magnetizačního proudu. Vypočtete příslušné hodnoty měrného náboje a z nich určete střední hodnotu.  
Doporučené hodnoty  $U$  a  $I$  jsou: 120 V/1,5 A; 140 V/1,5 A; 160V/2A; 180 V/2A; 200 V/2A.
3. Několikrát pootočte katodovou trubicí sem a tam vůči magnetickému poli a sledujte změnu trajektorie proudu elektronů. Uvidíte, že z kruhového tvaru ( $\vec{v} \perp \vec{B}$ ) přejde na šroubovitý ( $\vec{v} \nabla \vec{B}$ ) a nakonec v přímku ( $\vec{v} \parallel \vec{B}$ ). Nakreslete pozorované trajektorie do protokolu. Použijte napětí  $U = 150$  V a proud  $I = 1,5$  A.

## 3 Poznámky

1. Pracujete s vysokým napětím - pracujte se zvýšenou opatrností - uvědomte si nebezpečí dotyku s částmi zapojení pod napětím.
2. Jelikož elektrické pole je slabé, dosahují elektrony rychlosti o dva řády nižší než rychlost světla ve vakuu, a tudíž lze použít nerelativistický vztah (18). Skutečně při  $U = 100$  V je poměr rychlosti elektronu a rychlosti světla

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2eU}{mc^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{511 \cdot 10^3}} \approx 2 \cdot 10^{-2}, \quad (26)$$

kde  $mc^2 = 511 \cdot 10^3$  eV,  $eU = 100$  eV.

## Reference

- [1] I. Štoll: Elektrina a magnetismus, Skriptum FJFI, Vydavatelství ČVUT, Praha, 1994, str. 171 až 177.