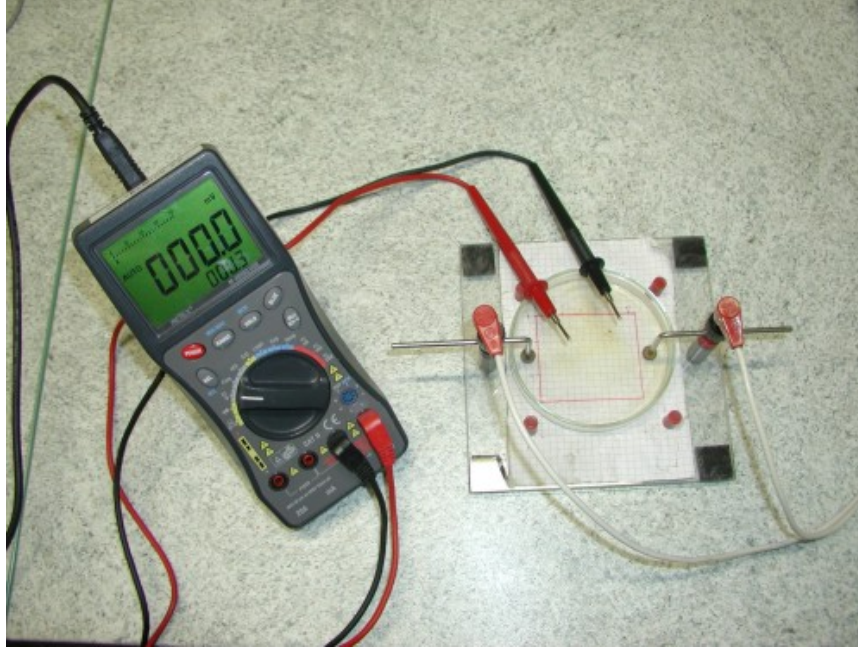


Kondenzátor, mapování elektrostatického pole

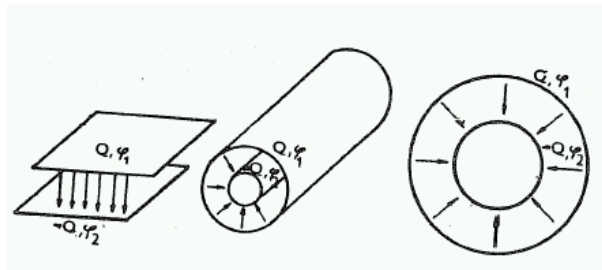


Pomůcky: Wimshurstova elektrika, váhy, deskový kondenzátor, podstavec, vodiče, sada distancí, zkratovač, regulovatelný zdroj 20V, souprava pro mapování elektrostatického pole, voltmetr PASPORT, PC (DataStudio, Mathematica),

1 Základní pojmy a vztahy

1.1 Kapacita kondenzátoru

Mějme soustavu dvou elektrod, nabitých stejně velikými náboji opačného znamení tak, že všechny siločáry elektrického pole vycházejí z kladné elektrody a končí na záporné. Elektrody mohou mít obecně libovolnou geometrii, např. jako dvě rovinné rovnoběžné desky, koaxiální válce, či koncentrické koule, apod. (viz obrázek 1) Napětí U mezi elektrodami je dáno nábojem Q



Obrázek 1: Různé geometrické konfigurace kondenzátorů.

na elektrodách, geometrií soustavy (velikost, tvar a vzájemná poloha elektrod) a vlastnostmi prostředí mezi nimi (permitivita ϵ). V elektrostatickém případě vyjdeme z Maxwellových rovnice pro stacionární elektrické pole¹:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (1)$$

Druhá z rovnic vyjadřuje, že pole je potenciální a dovoluje nám zavést skalární *elektrostatický potenciál* φ vztahem

$$\vec{E} = -\nabla\varphi.$$

¹v případě elektrostatického pole v dielektriku $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$

Napětí mezi elektrodami 1 a 2 je pak určeno rozdílem jejich potenciálů φ_1 a φ_2 :

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (2)$$

Pokud má naše soustava "pěknou" (symetrickou) geometrii, můžeme potřebné elektrické pole určit následujícím způsobem: vyjdeme z první rovnice soustavy (1) a převedeme ji do integrálního tvaru přes vhodně vybraný objem V :

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV.$$

Pomocí Gaussovy věty vektorové analýzy převedeme levou část rovnice na plošný integrál $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$. Integrujeme přes plochu S , uzavírající objem V . V pravé straně rozeznáváme výraz pro celkový náboj Q , uzavřený zvolenou plochou. Takto dostáváme formulaci obecného Gaussova zákona:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q/\epsilon_0$$

Tok intenity elektrického pole libovolnou uzavřenou plochou je roven celkovému náboji obklopenému touto plochou dělenému ϵ_0 . Pokud máme opravdu pěknou konfiguraci elektrod kondenzátoru² a vhodně zvolenou plochu (Gaussovu), může se stát, že vektor intenity elektrického pole na takovéto ploše je konstantní a navíc k ní kolmý³. Pak se vztah redukuje následovně:

$$ES = Q/\epsilon_0$$

což symbolicky můžeme zapsat tvarem $E = Q \cdot f(G, \epsilon_0)$, vyjadřující skutečnost, že elektrické pole je zde určeno nábojem Q nasobeným určitou konkrétní funkcí geometrie a vlastností prostředí mezi elektrodami. Vztah (2) pak můžeme přepsat do tvaru:

$$U = Q \int_1^2 f(G, \epsilon_0) dl.$$

Napětí U na kondenzátoru je uměrné přivedenému náboji Q a pro danou konfiguraci a prostředí dané konstantě $1/C$, zahrnující geometrii soustavy a elektrické vlastnosti prostředí mezi elektrodami.

$$U = Q/C \quad C = \frac{1}{\int f(G, \epsilon_0) dl} \quad (3)$$

V konkrétním případě válcového kondenzátoru (dva sousedé válce délky L a poloměrech R_1, R_2 ⁴), pokud bude geometrie taková⁵, že můžeme zanedbat okrajové efekty, s pomocí Gaussova zákona (Gaussovu plochu volíme ve tvaru válce délky L a poloměru r obklopujícím vnitřní elektrodu, zároveň uvnitř vnější elektrody) $E = \frac{Q}{S\epsilon_0} = \frac{Q}{2\pi r L \epsilon_0}$, pak napětí U spočítáme jako integrál

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi r L \epsilon_0} dr = Q \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi \epsilon_0 L} = \frac{Q}{C}, \quad \text{kde } C = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

1.2 Energie elektrostatického pole, síly mezi deskami kondenzátoru

Energie nahromaděná v kondenzátoru se spočítá z práce, potřebné k jeho nabití. Mějme kondenzátor o kapacitě C , který nese náboj $+q$ na jedné elektrodě a $-q$ na druhé. Na přenesení elementárního náboje z jedné desky na druhou proti potenciálovému rozdílu $U = q/C$ potřebujeme práci:

$$W = \int_0^Q U dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2. \quad (4)$$

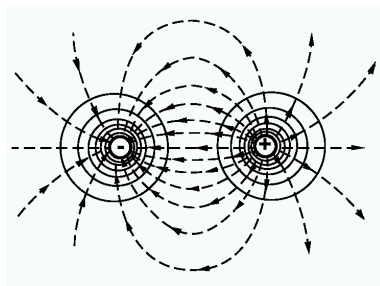
Pro případ deskového kondenzátoru $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ a s přihlédnutím ke vztahu $U = Ed$ dostáváme:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 V = w_E V, \quad (5)$$

kde $V = Sd$ je objem uzavřený mezi deskami kondenzátoru (S je plocha desek kondenzátoru, d jejich vzdálenost) a $w_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ je objemová hustota energie elektrického pole.

Sílu, kterou se přitahují desky kondenzátoru můžeme odvodit z energetické úvahy: jak se změní energie nahromaděná v kondenzátoru při malé změně vzdálenosti desek d :

$$F = \frac{dW}{dd} = \frac{\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S d}{dd} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{U^2}{d^2} S \quad (6)$$



Obrázek 2: Ekvipotenciály a siločáry elektrického pole dvou nábojů opačného znaménka.

1.3 Mapování elektrostatického pole

Elektrické pole \vec{E} v daném bodě prostoru je definováno jako elektrická síla \vec{F} na jednotkový náboj q :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (7)$$

Experimentálně nemůžeme mapovat elektrické pole, protože bychom těžko někde umísťovali testovací náboj. Můžeme však použít nepřímé metody stanovením pole z ekvipotenciálních ploch. Potenciálový rozdíl ΔU je definován jako práce W potřebná k přemístění jednotkového náboje q_0 z jednoho místa elektrického pole na druhé:

$$\Delta U = \frac{W}{q_0} \quad (8)$$

Elektrické pole je záporně vzatý gradient potenciálu:

$$\vec{E} = -\frac{dU}{ds}, \quad (9)$$

kde s je souřadnice ve směru elektrického pole.

2 Experimentální schéma

Experimentální sestava je schématicky zobrazena na obrázku 3, fotografie je na obr. 4. Přitažlivé síly mezi deskami kondenzátoru jsou měřeny prostřednictvím vah. Kondenzátor je nabíjen tzv. Wimshurstovou elektrickou. Napětí potřebné pro vztah 6 lze odvodit při přeskočení jiskry buď mezi deskami kondenzátoru (hrubý odhad napětí při průrazu mezi deskami kondenzátoru lze odvodit z dielektrické pevnosti suchého vzduchu cca $30kV/cm$), nebo na kulovém jiskřišti Wimshurstovy elektriky (viz poznámka 1).

Pro měření elektrostatického pole připravíme např. vodní lázeň, do ní vnoříme dvě elektrody v různých konfiguracích (viz obrázek 5 až 7). Potenciál v bodech stanovené sítě měříme voltmetrem napojeným na počítač. Sběr dat provedeme s pomocí programu komunikujícího s voltmetrem přes port USB (Linux). K zobrazení dat jsou na počítači k dispozici krátké skripty pro utilitu *gnuplot*, důkladnější zpracování je možné např. v programu *mathematica* a jiných. Vzorová zobrazení jsou na obr. 8.

3 Pracovní úkoly

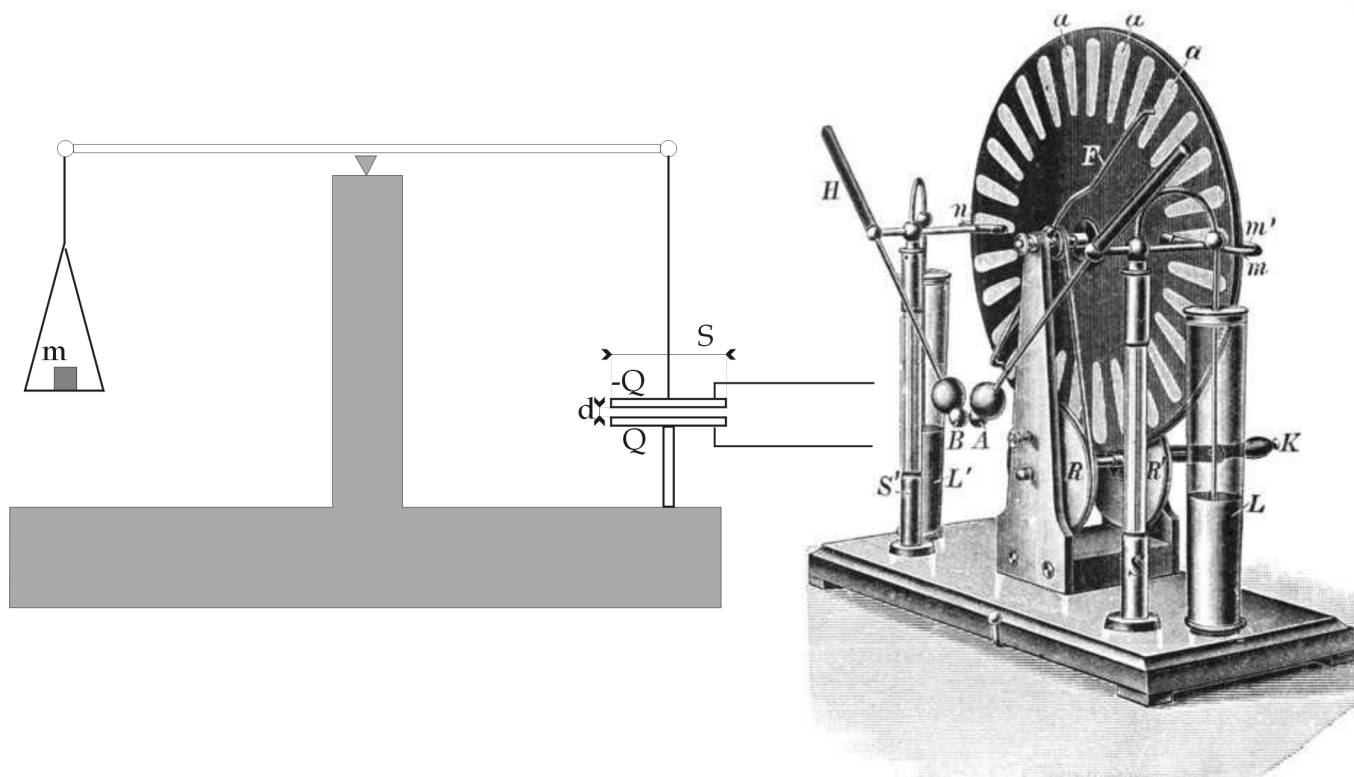
1. DÚ: Připomeňte si odvození kapacity deskového kondenzátoru.
2. DÚ: Bezpečnostní normy připouštějí maximální náboj $50\mu C$ na deskách kondenzátoru. Stanovte jednu náhodnou geometrii deskového kondenzátoru, který by překročil tuto normu při napětí $100kV$.
3. Změřte přitažlivé síly mezi deskami kondenzátoru pro různé vzdálenosti desek. Náboj přivádějte až do průrazu mezi deskami kondenzátoru. Napětí odhadněte z dielektrické pevnosti vzduchu. Naměřené hodnoty silového působení změřené na vahách porovnejte s předpovědí ze vztahu 6.

²např. právě rovinný, kulový a válcový kondenzátor

³v případě deskového a válcového kondenzátoru budeme muset zvolit takovou konfiguraci, aby okrajové efekty byly zanedbatelné. U deskového kondenzátoru musí mít desky velké rozměry ve srovnání s jejich vzdáleností.

⁴např: veledůležitá badatelská pomůcka - koaxiální kabel

⁵kondenzátor bude dostatečně dlouhý a "štíhlý"



Obrázek 3: Schéma zapojení experimentu měření silového působení mezi deskami kondenzátoru.

- Změřte přitažlivé síly mezi deskami kondenzátoru pro tři různé vzdálenosti desek (dle distancí). Náboj přivádějte až do průrazu na kulovém jiskřišti Wimshurstovy elektriky. Ze silového působení spočítejte napětí (6) a ze vztahu v poznámce 1 se pokuste určit neznámou funkci $f(s/D)$. Experimentální data a nalezenou funkci zpracujte do grafu.
- Zvolte si různé konfigurace elektrod (viz obr. 5, 6 a 7), nastavte na nich napětí cca 10V a zmapujte potenciál v síti 16x14 bodů. Vyhodnoťte pomocí příslušného software v systému Linux (odečítání dat voltmetru, gnuplot). Data si vyzálohujte a proveďte důkladné vyhodnocení v domácím zpracování.

4 Poznámky

- Kulové jiskřiště je nejjednodušší elektrický měřicí přístroj pro měření vysokých napětí, který lze s nepatrnými prostředky improvizovat. Jde-li o elektrody geometricky definovatelné, pro něž lze matematicky určit tvar pole, lze průrazné napětí vypočítat a je možno mluvit o absolutní měřicí metodě. Zvláště pro kulové jiskřiště, složené ze dvou stejně velkých koulí, z nichž jedna může být uzemněna, byla tato úloha několikrát řešena. Používaný vzorec je:

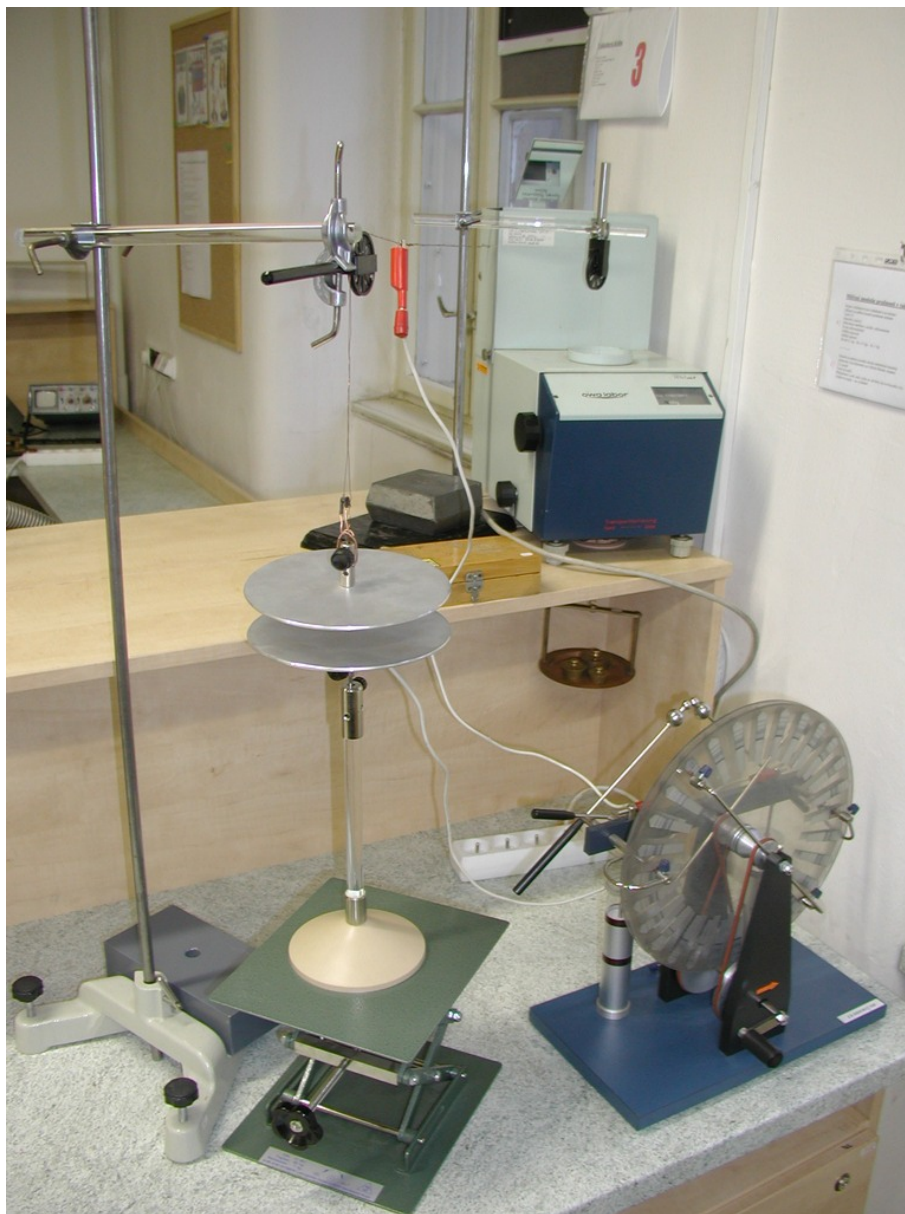
$$U_a = 27.75 \left(1 + \frac{0.757}{\sqrt{\delta D}}\right) \delta \frac{s}{f}, \quad (10)$$

kde U_a je počáteční napětí [kV], s doskok, tedy vzdálenost mezi kuličkami jiskřiště [cm], D průměr koulí [cm], $\delta = \frac{b}{760} \cdot \frac{273+20}{273+t}$ relativní hustota vzduchu, b barometrický tlak [mm rtuňového sloupce], t teplota v místnosti [$^{\circ}C$] a funkce f je závislá na poměru s/D a na poloze jiskřiště proti zemi, tedy na geometrické pravidelnosti pole; pro $s/D = 0$ je $f = 1$ a zvětšuje se se vzrůstajícím s .

- Před měřením si zavěšenou kruhovou desku vyrovnejte do vodorovné polohy pomocí malého závažíčka.
- Před manipulací s deskami (měření vzdáleností) nezapomeňte aparaturu zkratovat!

Reference

- [1] Štoll, I.: Elektřina a magnetismus. Ediční středisko ČVUT, Praha 1994.
- [2] Phywe series of publications: University Laboratory Experiments Physics. Phywe systeme GMBH, 1994.

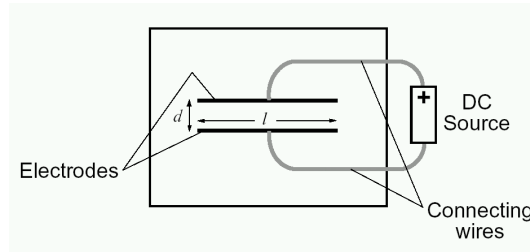


Obrázek 4: Fotografie experimentu měření silového působení mezi deskami kondenzátoru.

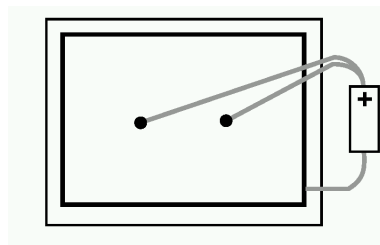
[3] Answers.com: <http://www.answers.com/topic/capacitor>

[4] Novák, B.: Technika měření vysokých napětí. SNTL Praha 1954

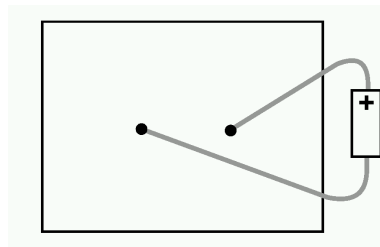
[5] Paul Falstad: Math and Physics Applets - 2-D Electrostatics. <http://www.falstad.com/emstatic>



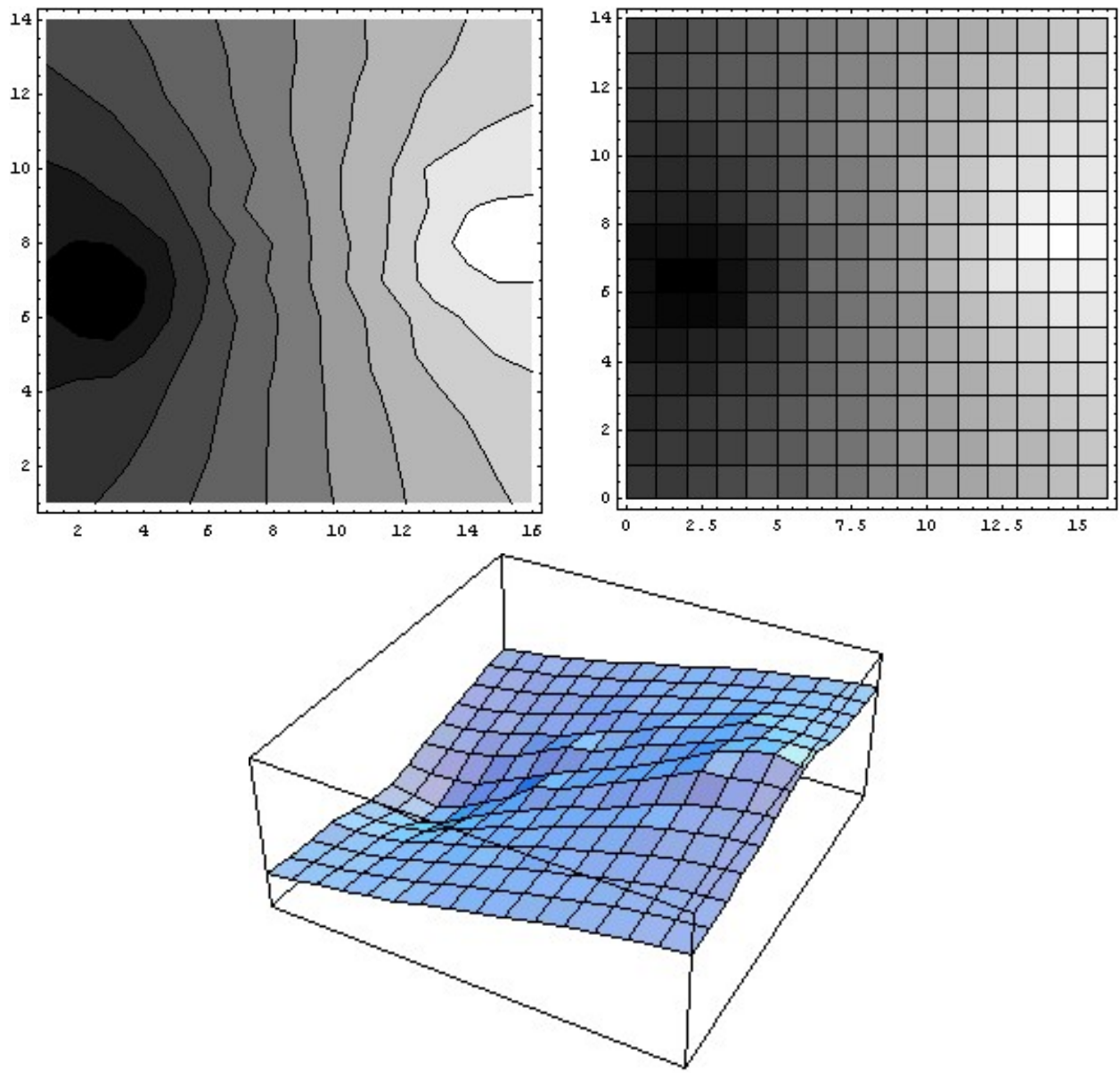
Obrázek 5: Experimentální sestava pro měření elektrického pole v konfiguraci kondenzátor



Obrázek 6: Experimentální sestava pro měření elektrického pole v konfiguraci dvou bodů stejného znaménka



Obrázek 7: Experimentální sestava pro měření elektrického pole v konfiguraci dvou bodů opačného znaménka



Obrázek 8: Příklady zpracovaných dat z mapování elektrostatického pole.