

Řešení 10. zadané úlohy - Jakub Kákona

1. Protože máme zadaná vlastní čísla, můžeme určit požadovaný charakteristický polynom pozorovatele.

$$p(s) = (s + 2)^3 = s^3 + 6s^2 + 12s + 8. \quad (1)$$

- (a) Určíme pozorovatele z obecného tvaru zavedením vektoru $K = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

A dosazením do charakteristického polynomu pozorovatele

$$\det[sI - (A - KC)] = \det \left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \\ -c & 3 & -1 \end{bmatrix} \right) \quad (2)$$

Tím získáme polynom:

$$s^3 + (a + 1)s^2 + (a + b - 3)s - 3a + b + c \quad (3)$$

Srovnáním koeficientů u obou polynomů zjistím, že stavová injekce pozorovatele musí

být $K = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}$

- (b) Sestavíme matici pozorovatelnosti a její inverzi

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = O^{-1} \quad (4)$$

Matici stavové injekce pozorovatele lze pak určit podle Ackermanova vztahu.

$$K = p(s)AO^{-1}e_n = \left(A + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix} \quad (5)$$

2. Odhadovač stavu s minimální odchylkou je dán rovnicí

$$K^* = P_e^* C^T V^{-1} \quad (6)$$

Kde P_e^* je pozitivně definitní řešení Riccatiový rovnice:

$$P_e A^T + A P_e - P_e C^T V^{-1} P_e + W = 0 \quad (7)$$

Po dosazení zadaných hodnot se výraz zjednodušuje na

$$P_e \alpha + \alpha P_e - P_e^2 + \omega^2 = 0 \quad (8)$$

Úpravami tohoto výrazu dostaneme řešení

$$P_e^* = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \quad (9)$$

Díky zadání ale víme, že $K^* = P_e^*$, proto:

$$K^* = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \quad (10)$$

3. Systém je v pozorovatelné formě složen z jediného bloku a index pozorovatelnosti je proto 3.

Pozorovatel bude proto také tvořen jedním blokem následujícího tvaru. S nulovými vlastními čísly.

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Matice pak může být sestavena z kombinace posledních sloupců matic A_d , A , C .

$$K = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Ještě ověříme platnost $A - KC = A_d$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A_d \quad (13)$$

Odchylka odhadu bude nulová za minimální počet kroků $L=3$, protože

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_d^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_d^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

4. Zavedeme si stavy systému $x(t) = x_1, \dot{x}(t) = x_2$

Potom dostaneme stavové rovnice

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (15)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 \quad (16)$$

$$(17)$$

A stavový popis:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Požadovaný charakteristický polynom pozorovatele potom bude:

$$a_d = (s + 5\omega)^2 = s^2 + 10\omega s + 25\omega^2 \quad (20)$$

Opět použijeme pro určení pozorovatele přímou metodu:

$$\det[sI - (A - KC)] = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1-a \\ \omega^2 & -b \end{bmatrix}\right) \quad (21)$$

$$s^2 + bs - \omega^2 a + \omega^2 \quad (22)$$

Porovnáním obou polynomů určíme koeficienty vektoru stavové injekce $K = \begin{bmatrix} -24 \\ 10\omega \end{bmatrix}$

5. Zavedeme si popis systému $\theta = x_1, \dot{\theta} = x_2$. Ze zadání potom platí: $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_2 + u$
Maticový popis systému pak vypadá následovně:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (23)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

- (a) Vzhledem k požadovaným vlastním číslům, je charakteristický polynom pozorovatele:

$$a_d = (s + 5)^2 = s^2 + 10s + 25 \quad (25)$$

Opět využijeme charakteristický polynom v obecném tvaru

$$\det[sI - (A - KC)] = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -b & -1 \end{bmatrix}\right) \quad (26)$$

$$s^2 + s(a + 1) - a + b \quad (27)$$

Porovnáním koeficientů polynomů zjistíme, že $K = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}$

- (b) Nevím.