Řešení 10. zadané úlohy - Jakub Kákona

1. Protože máme zadaná vlastní čísla, můžeme určit požadovaný charakteristický polynom pozorovatele.

$$p(s) = (s+2)^3 = s^3 + 6s^2 + 12s + 8. \tag{1}$$

   (a) Určíme pozorovatele z obecného tvaru zavedením vektoru $K = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

   A dosazením do charakteristického polynomu pozorovatele

$$\det[sI - (A - KC)] = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \\ -c & 3 & -1 \end{bmatrix} \right) \tag{2}$$

   Tím získáme polynom:

$$s^3 + (a+1)s^2 + (a+b-3)s - 3a + b + c \tag{3}$$

   Srovnáním koeficientů u obou polynomů zjistím, že stavová injekce pozorovatele musí být $K = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}$

   (b) Sestavíme matici pozorovatelnosti a její inverzi

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = O^{-1} \tag{4}$$

   Matici stavové injekce pozorovatele lze pak určit podle Ackermanova vztahu.

$$K = p(s)AO^{-1}e_n = \left(A + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix} \tag{5}$$

2. Odhadovač stavu s minimální odchylkou je dán rovnicí

$$K^* = P_e^* C^T V^{-1} \tag{6}$$

   Kde P_c^* je pozitivně definitní řešení Riccatiovy rovnice:

$$P_e A^T + AP_e - P_e C^T V^{-1} P_e + W = 0 \tag{7}$$

   Po dosazení zadaných hodnot se výraz zjednodušuje na

$$P_e \alpha + \alpha P_e - P_e^2 + \omega^2 = 0 \tag{8}$$

   Úpravami tohoto výrazu dostaneme řešení

$$P_e^* = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \tag{9}$$

   Díky zadání ale víme, že $K^* = P_e^*$, proto:

$$K^* = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \tag{10}$$

3. Systém je v pozorovatelné formě složen z jediného bloku a index pozorovatelnosti je proto 3.

   Pozorovatel bude proto také tvořen jedním blokem následujícího tvaru. S nulovými vlastními čísly.

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

   Matice pak může být sestavena z kombinace posledních sloupců matic A_d, A, C.

$$K = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

   Ještě ověříme platnost $A - KC = A_d$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A_d \tag{13}$$

   Odchylka odhadu bude nulová za minimální počet kroků L=3, protože

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_d^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_d^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

4. Zavedeme si stavy systému $x(t) = x_1, \dot{x}(t) = x_2$

   Potom dostaneme stavové rovnice

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{15}$$
$$\dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 \tag{16}$$
$$\tag{17}$$

   A stavový popis:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{18}$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

   Požadovaný charakteristický polynom pozorovatele potom bude:

$$a_d = (s + 5\omega)^2 = s^2 + 10\omega s + 25\omega^2 \tag{20}$$

Opět použijeme pro určení pozorovatele přímou metodu:

$$\det[sI - (A - KC)] = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1-a \\ \omega^2 & -b \end{bmatrix}\right) \tag{21}$$

$$s^2 + bs - \omega^2 a + \omega^2 \tag{22}$$

Porovnáním obou polynomů určíme koeficienty vektoru stavové injekce $K = \begin{bmatrix} -24 \\ 10\omega \end{bmatrix}$

5. Zavedeme si popis systému $\theta = x_1, \dot{\theta} = x_2$. Ze zadání potom platí: $\dot{x_1} = x_2, \dot{x_2} = -x_2 + u$ Maticový popis systému pak vypadá následovně:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{23}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

(a) Vzhledem k požadovaným vlastním číslům, je charakteristický polynom pozorovatele:

$$a_d = (s+5)^2 = s^2 + 10s + 25 \tag{25}$$

Opět využijeme charakteristický polynom v obecném tvaru

$$\det[sI - (A - KC)] = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -b & -1 \end{bmatrix}\right) \tag{26}$$

$$s^2 + s(a+1) - a + b \tag{27}$$

Porovnáním koeficientů polynomů zjistíme, že $K = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}$

(b) Nevim.