Řešení 11. zadané úlohy - Jakub Kákona

1. Obecný stavový popis dvou paralelně spojených systémů má následující tvar:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \tag{1}$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 + D_2 \end{bmatrix} u \tag{2}$$

Dosadíme do něj matice zadaných systémů S_1 a S_2. A stavový popis přejde na tento tvar:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \tag{3}$$

$$y = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u \tag{4}$$

Sestavíme matici pozorovatelnosti:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Hodnost této matice je pouze 1. Celkový systém proto není úplně pozorovatelný.

Pro ověření řiditelnosti využijeme matici řiditelnosti:

$$C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Hodnost této matice je 1 a celkový systém proto není úplně řiditelný.

2. (a) Pro řešení sériového spojení systémů S_1 a S_2 využijeme obecný stavový popis dvou sériově zapojených systémů následujícího tvaru:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 D_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ D_2 D_1 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Pokud budeme uvažovat pouze vstup u_1 a výstup y_2, tak dostaneme následující stavový popis sériového spojení systémů.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 \tag{9}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \tag{10}$$

Pozorovatelnost celkového systému:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Hodnost matice pozorovatelnosti je 1 a celkový systém proto není úplně pozorovatelný.
Ověříme řiditelnost systému

$$C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Hodnost matice řiditelnosti je 2 a systém je úplně řiditelný
Celkový přenos systému ze vstupu u_1 na výstup y_2 je

$$H(s) = C(sI-A)^{-1}B+D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s+1} \tag{13}$$

(b) sériové zapojení systémů v opačném pořadí
Opět dosadíme do obecného stavového popisu sériově zapojeného systému a dostaneme následující tvar:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \tag{14}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \tag{15}$$

Pozorovatelnost celkového systému:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Hodnost matice pozorovatelnosti je 2 a celkový systém proto je úplně pozorovatelný.
Ověříme řiditelnost systému

$$C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Hodnost matice řiditelnosti je 1 a systém proto není úplně řiditelný.
Celkový přenos sériového spojené systému je

$$H(s) = C(sI-A)^{-1}B+D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s+1} \tag{18}$$

3. (a)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1M_2D_2C_1 & B_1M_2C_2 \\ B_2M_1C_1 & A_2 + B_2M_1D_1C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1M_2 & B_1M_2D_2 \\ B_2M_1D_1 & B_2M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1C_1 & M_1D_1C_2 \\ M_2D_2C_1 & M_2C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1D_1 & M_1D_1D_2 \\ M_2D_2D_1 & M_2D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

Kde $M_1 = (I - D_1 D_2)^{-1}$, $M_2 = (I - D_2 D_1)^{-1}$

Pokud pak uvažujeme pouze vstup r_1 a výstup y_1, dostaneme výsledný stavový popis sériově zapojeného systému.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} r_1 \tag{21}$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + r_1 \tag{22}$$

(b) Stabilitu systému určíme z vlastních čísel matice A.

$$\det(sI - A) = \det\left(\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix}\right) = s^2 - s + s - 1 + 1 = s^2 \tag{23}$$

Systém má dva nulové póly, které způsobují jeho vnitřní nestabilitu.

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Hodnost matice pozorovatelnosti je 1 a celkový systém proto není pozorovatelný. Ověříme řiditelnost systému

$$C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Hodnost matice je pouze 1 a systém proto není řiditelný.

(c) Přenos systému ze vstupu r_1 na výstup y_1 je

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s^2} & \frac{1}{s^2} \\ \frac{-1}{s^2} & \frac{s+1}{s^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = 1 \tag{26}$$