Řešení 12. zadané úlohy - Jakub Kákona

1. Sestavíme minimální realizaci sytému v řiditelné formě

$$D_c = \lim_{s\to\infty} H_1(s) = 0 \tag{1}$$

$$C_c = [b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Potřebujeme vybrat takové matice $F = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, že vlastní čísla matic $A+BF$ a $A-KC$ budou mít zápornou reálnou část.

$$\det(sI - (A+BF)) = s^2 - sb - a \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\det(sI - (A+KC)) = s^2 + sc + d \qquad K = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Stabilizující regulátory H_2 mají tuto stavovou reprezentaci:

$$\dot{x} = \quad Ax + Bu + K(y - (Cx + Du)) \tag{7}$$

$$u = \quad Fx + K'(q)(y - (Cx + Du)) \tag{8}$$

Kde $K'(q)$ je stabilní ryzí matice. Po dosazení známých hodnot dostaneme všechny ryzí regulátory H_2 stabilizující systém H_1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} (y - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x) \tag{9}$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + K'(q)(y - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x) \tag{10}$$

2.

3.

4. (a) Stavová reprezentace systému pro případ $\theta = x_1, \dot{\theta} = x_2$ stejná jako v případě úkolu 10.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{11}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

(b) Podmínka požaduje charakteristický polynom systému se stavovou zpětnou vazbou ve tvaru

$$(s+1)(s+1) = s^2 + 2s + 1 \tag{13}$$

$$\det(sI - (A + BF)) = s^2 - s(1-b) - a \tag{14}$$

Kde $F = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$
Porovnáním koeficientů obou polynomů dostaneme matici stavové zpětné vazby

$$F = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

(c) Podmínka požaduje charakteristický polynom pozorovatele ve tvaru

$$(s+5)(s+5) = s^2 + 10s + 25 \tag{16}$$

Obecný charakteristický polynom pozorovatele je

$$\det(sI - (A + KC)) = s^2 - s(1-a) + a + b \tag{17}$$

Kde $K = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
Porovnáním koeficientů obou polynomů dostaneme matici stavové zpětné vazby

$$K = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix} \tag{18}$$

(d) Stavový popis systému systému s pozorovatelem a stavovou zpětnou vazbou je

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BF \\ KC & A - KC + BF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r \tag{19}$$

$$y = \begin{bmatrix} C & DF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} + Dr \tag{20}$$

Po dosazení dostaneme:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 9 & 0 & -9 & 1 \\ 16 & 0 & -17 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{21}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \tag{22}$$

Přenos tohoto systému pak je:

$$H(s) = C(sI-A)^{-1}B+D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 1 & 1 \\ -9 & 0 & s+9 & -1 \\ -16 & 0 & 17 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)}$$

Charakteristický polynom systému je

$$\det(sI - A) = (s+5)^2(s+1)^2 \tag{24}$$

Vlastní čísla leží na záporné ose a systém je stabilní.
Pozorovatelnost celkového systému:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -25 & 1 & 27 & 2 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Hodnost matice pozorovatelnosti je 4 a systém je pozorovatelný.
Ověříme řiditelnost systému

$$C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Hodnost matice řiditelnosti je 2 a není úplně řiditelný.

5. (a) Podmínka požaduje charakteristický polynom systému se stavovou zpětnou vazbou ve tvaru

$$(s+0,5+0,5j)(s+0,5+0,5j) = s^2+s+0,5 \tag{27}$$

Obecný charakteristický polynom je

$$\det(sI-(A+BF)) = s^2+sb+a-1 \tag{28}$$

Kde $F = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$
Porovnáním koeficientů obou polynomů dostaneme matici stavové zpětné vazby

$$F = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

(b) Podmínka požaduje charakteristický polynom systému se stavovou zpětnou vazbou ve tvaru

$$(s+\alpha+j)(s+\alpha-j) = s^2+\alpha s+\alpha^2+1 \tag{30}$$

Obecný charakteristický polynom pozorovatele je

$$\det(sI-(A-KC)) = s^2+sa+b-1 \tag{31}$$

Kde $K = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
Porovnáním koeficientů obou polynomů dostaneme matici stavové injekce

$$K = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha^2+2 \end{bmatrix} \tag{32}$$

(c) Stavový systém s pozorovatelem a stavovou zpětnou vazbou využívající pozorovatelem odhadované stavy je

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BF \\ KC & A - KC + BF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r \tag{33}$$

$$y = \begin{bmatrix} C & DF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + Dr \tag{34}$$

Po dosazení dostaneme:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 2\alpha & 0 & 2\alpha & 1 \\ \alpha^2 + 2 & 0 & -\alpha^2 - \frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r \tag{35}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \tag{36}$$