Řešení 3. zadané úlohy - Jakub Kákona

1. Diskrétní systém je v rovnovážném stavu v případě, když nemění svůj stav. Tedy všechny jeho následující stavy jsou rovny předchozím stavům.

   Z toho plyne:

   $$x_1(k+1) = x_1(k) \qquad\qquad x_2(k+1) = x_2(k) \tag{1}$$

   Dosazením do zadané soustavy získáme tvar:

   $$x_1(k) = x_1(k)x_2(k) - 1 \qquad\qquad x_2(k) = 2x_1(k)x_2(k) - 2 \tag{2}$$

   Dále postupně řešíme soustavu těchto rovnic.

   $$x_1(k) = \frac{1}{x_2(k) - 1} \qquad\qquad x_2(k) = \frac{2x_1(k)}{x_2(k) - 1} - 2 \tag{3}$$

   úpravou získáme kvadratickou rovnici

   $$x_2(k)^2 - 3x_2(k) + 2 = 0 \tag{4}$$

   Její kořeny jsou:

   $$x_{21}(k) = -1 \qquad\qquad x_{22}(k) = -2 \tag{5}$$

   Dosazením do vztahu pro x_1 dostaneme zbývající složky

   $$x_{11}(k) = -\frac{1}{2} \qquad\qquad x_{12}(k) = -\frac{1}{3} \tag{6}$$

   A systém má dva rovnovážné body

   $$a_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} \qquad\qquad a_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

2. Zadaná soustava rovnic může být přepsána do maticového tvaru

   $$\dot{x} = Ax \qquad\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

   Tato matice ale není regulární, proto má systém nekonečně mnoho rovnovážných bodů. Jejich vyjádření získáme požadavkem na nulové derivace v rovnovážných bodech. Řešíme tedy homogenní rovnici.

   $$0 = Ax \tag{9}$$

   Tato rovnice má řešení

   $$a = \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \qquad\qquad t \in R \tag{10}$$

3. zadaný systém není asymptoticky stabilní, protože

$$\lim_{x \to \infty} \sin x(k) \neq 0 \tag{11}$$

4. K určení stability nepomůže Sylvestrovo kritérium, proto najdeme vlastní čísla matice z charakteristického polynomu

$$\det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 \tag{12}$$

   Polynom má komplexní kořeny $\lambda_{1,2} = \pm j$

   A matice je positivně semidefinitní. Systém je proto stabilní, ale ne asymptoticky.

5. Pokud si zvolíme hodnoty $x_1(k) = x(k), x_2(k) = x(k+1)$ dostaneme $x_1(k+1) = x(k+1), x_1(k+1) = x_2(k)$ A můžeme vytvořit soustavu rovnic.

$$x_1(k+1) = x_2(k) \qquad x_2(k+1) = -x_1(k) + u(k) \qquad y(k) = x_1(k) \tag{13}$$

   Kterou můžeme přepsat do tvaru

$$x_1(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + [0]u(k) \tag{14}$$

   Z toho pak můžeme zjistit přenos systému

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \;\; G(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{z^2+1} \begin{bmatrix} z & 1 \\ -1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z^2+1} \tag{15}$$

   singularita přenosu nastává v bodech $z = \pm j$ A systém není BIBO stabilní, protože jeho póly nejsou uvnitř jednotkového kruhu, ale na jeho hranici.