Řešení 4. zadané úlohy - Jakub Kákona

1. Problém se pravděpodobně řeší vypočtením gramiánu. A řešením získané soustavy.

   Vstup který změní stav systému z nuly na stav α pravděpodobně udrží stav α i nadále, neboť hodnota vstupu pravděpodobně postupně během časového intervalu T klesne k nule.

2. Můžeme spočítat matici dosažitelnosti systému

$$C_k = \left[B, AB, A^2B\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

   $h(C_k = 2)$ proto je dosažitelný podprostor generován dvěma lineárně nezávislými vektory

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

   Aby stav systému x^1 byl dosažitelný, musí být součástí dosažitelného prostoru. tj. lze jej nakombinovat z báze dosažitelného prostoru.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

   Obecně jsou koeficienty a, b reálné a jsou souřadnicemi všech dosažitelných stavů.

   Řešením této soustavy je například $a = 2$, $b = 1$. Stav x^1 je proto určitě dosažitelný.

   Vstup $u(k)$ potřebný k dosažení stavu x^1 vypočteme ze vztahu

$$C_k U_k = x^1 - A^k x^0 \tag{4}$$

   Vzhledem k tomu, že požadovaná počáteční podmínka je $x = 0$. Tak předchozí rovnice přejde na tvar:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

   Rešením této soustavy je vstupní sekvence, která způsobí přechod systému ze stavu $x = 0$ do stavu x^1 za dva kroky

$$\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

3. Systém (A,B) je řiditelný v případě, že matice $[\lambda I - A, B]$ má plnou hodnost pro každé z n vlastních čísel λ_i matice A.

   Je proto nutné zjistit vlastní čísla matice A.

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = s^2(s-1)^2 \longrightarrow \lambda_{1,2} = 0 \lambda_{3,4} = 1 \tag{7}$$

   Spočítáme hodnost matice pro vlastní čísla 0.

$$h(\lambda_{1,2} I - A, B) = h\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 3 \tag{8}$$

   Matice nemá plnou hodnost pro nulová vlastní čísla a proto jsou módy odpovídající těmto vlastním číslům neřiditelné.

$$h(\lambda_{3,4} I - A, B) = h\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 4 \tag{9}$$

   Matice má plnou hodnost pro vlastní čísla $\lambda_{3,4} = 1$ a módy odpovídající těmto vlastním číslům jsou proto řiditelné.

4. Najdeme matice převodu do diskrétního tvaru.

$$\tilde{A} = e^{At} = L^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\tilde{B} = \left(\int_0^T e^{At} dt \right) B = \begin{bmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix}_0^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \end{bmatrix} \tag{11}$$

   Matice dosažitelného prostoru diskrétního systému pak je

$$C_k = \left[\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}\right] = \begin{bmatrix} 1 - \cos T & \cos T - \cos^2 T + \sin^2 T \\ \sin T & \sin T - \cos T \sin T + \cos T \sin T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \cos T & \cos T - 1 \\ \sin T & \sin T \end{bmatrix} \tag{12}$$

   Aby systém mohl být řiditelný, musí mít matice C_k plnou hodnost. To znamená že $T \neq k\pi, k \in Z$

5. Opět potřebujeme matici dosažitelného prostoru stavů:

$$C_k = [B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Vidíme, že matice má hodnost 2. prostor dosažitelných stavů je proto generován dvěma lineárně nezávislými vektory. Protože víme, že každý dosažitelný stav je řiditelný, určíme řiditelné stavy, jako libovolnou lineární kombinaci vektorů generujících dosažitelný podprostor.

$$x = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha + \beta \\ \alpha + 2\beta \end{bmatrix} \qquad \alpha, \beta \in R \tag{14}$$