Řešení 5. zadané úlohy - Jakub Kákona

1. Potřebujeme spočítat matici pozorovatelnosti systému

$$O = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$h(O = 2)$. Hodnost je proto menší, než řád systému (3). Systém je proto pozorovatelný jenom částečně.

(a) Stav je nepozorovatelný, pokud je součástí jádra matice O. tj. $x \in ker(O)$
Hledáme proto řešení soustavy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \tag{2}$$

Řešením této soustavy jsou všechny nepozorovatelné stavy

$$x = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in R \tag{3}$$

(b) Stav systému je nesestrojitelný, pokud existuje takové $\tilde{x}$, že $x = A^k \tilde{x}$, $C\tilde{x} = 0, 0 \leq k$
řešíme proto rovnici:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \tag{4}$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in R \tag{5}$$

Dále potřebujeme vyřešit $x = A^k \tilde{x}$. Ale

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

z toho $A^k \tilde{x} = \tilde{x}$. V důsledku toho jsou všechny nepozorovatelné stavy zároveň nesestrojitelné.

$$\tilde{x} = x = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in R \tag{7}$$

2. Vypočteme matici pozorovatelnosti

$$O = \begin{bmatrix} C \\ AC \\ A^2C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Hodnost této matice je 2. Systém proto není úplně pozorovatelný a počáteční podmínku musíme proto hledat z rovnice.

$$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-(i+1)} Bu(i) + Du(k). \tag{9}$$

Protože ale matice B a D jsou nulové, tak se rovnice zjednoduší na tvar:

$$y(k) = CA^k x(0). \tag{10}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Znovu dosadíme do soustavy a dostaneme:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{12}$$

Vyřešením soustavy pak zjistíme, že počáteční podmínka má nějaký tvar typu:

$$x(0) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in R \tag{13}$$

3. Je potřeba zjistit vlastní čísla matice A.

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2) \longrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2 \tag{14}$$

Vlastní číslo je nepozorovatelné v případě, že sníží hodnost matice pod řád systému.

$$h\left(\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}\right) < n \tag{15}$$

Spočítáme proto hodnost matice pro jednotlivá vlastní čísla.

$$h\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{\lambda_1}\right) = 3 \tag{16}$$

$$h\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{\lambda_2}\right) = 2 \tag{17}$$

$$h\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{\lambda_3}\right) = 3 \tag{18}$$

Vidíme, že jediné problematické vlastní číslo je $\lambda_2 = -1$, které je nepozorovatelné.

4. (a) Spočítáme matici řiditelnosti systému

$$C = \left[B, AB, A^2B, A^3B\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 & 0 & -\omega^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 & -2\omega^3 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Matice řiditelnosti systému má plnou hodnost 4. systém je proto řiditelný vstupem u.

Dále spočítáme matici pozorovatelnosti systému

$$O = \begin{bmatrix} C \\ AC \\ A^2C \\ A^3C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 0 \\ -6\omega^3 & 0 & 0 & -4\omega^2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Matice pozorovatelnosti systému má plnou hodnost, proto je systém pozorovatelný na výstupu y.

(b) - selhání radiální trysky:

Je třeba upravit matici B, tak aby vliv radiální trysky byl nulový. A pak znovu přepočítáme matici řiditelnosti systému.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\omega & 0 & 0 & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4\omega^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Protože je hodnost matice stále 4, tak je systém řiditelný pouze tangenciálním pohonem. I v případě výpadku radiálního pohonu.

(c) - selhání tangenciální trysky:

Je třeba upravit matici B, tak aby vliv tangenciální trysky byl nulový. A pak znovu přepočítáme matici řiditelnosti systému.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 & 0 & -2\omega^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Hodnost této matice je ale pouze 3 a satelit proto není řiditelný pouze radiální tryskou.

(d) Pozorovatelnost systému vyřešíme obdobným způsobem, úpravou matice C.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ AC \\ A^2C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Hodnost této matice je 3 a systém není pozorovatelný pouze na výstupu y_1

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ AC \\ A^2C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6\omega^3 & 0 & 0 & -4\omega^2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Hodnost matice pozorovatelnosti systému je 4 a systém je pozorovatelný pouze na výstupu y_2

5. Najdeme matice převodu do diskrétního tvaru.

$$\tilde{A} = e^{At} = L^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\tilde{C} = Ce^{A\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \tag{30}$$

Matice pozorovatelnosti diskrétního systému pak vypadá takto

$$O = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\alpha\cos T - \sin\alpha\sin T & \cos\alpha\sin T + \sin\alpha\cos T \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$O = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos(\alpha + T) & \sin(\alpha + T) \end{bmatrix} \tag{32}$$

Aby systém nebyl pozorovatelný, tak matice O musí být singulární a musí platit:

$$\cos\alpha\sin(\alpha + T) - \sin\alpha\cos(\alpha + T) = 0 \tag{33}$$