# Řešení 6. zadané úlohy - Jakub Kákona

1. Spočítáme matici řiditelnosti systému

$$C = \left[B, AB, A^2B, A^3B\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 13 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & \end{bmatrix} \tag{1}$$

Protože tato matice má hodnost pouze 4. Tak obsahuje zbytečné vektory. Vybereme proto lineárně nezávislé:

$$\tilde{C} = \left[B, AB, A^2B, A^3B\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Indexy řiditelnosti pak jsou

$$\mu_1 = 3 \qquad\qquad \mu_2 = 1 \tag{3}$$

Dále vypočteme inverzní matici k matici $\tilde{C}$

$$\tilde{C}^{-1} = \left[B, AB, A^2B, A^3B\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Pro sestavení transformační matice P vybereme řádky $q_1, q_2$ na základě zjištěných indexů řiditelnosti.

$$P = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1A \\ q_1A^2 \\ q_2 \end{bmatrix} \qquad\qquad \sigma_1 = \mu_1 = 3, \sigma = \mu_1 + \mu_2 = 4 \tag{5}$$

Z matice $\tilde{C}^{-1}$ bude proto k sestavení transformační matice P použit 3. a 4. řádek

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$P = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1A \\ q_1A^2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad , \tag{8}$$

Nyní přetransformujeme matice A a B pomocí nalezené matice P.

$$A_c = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$B_c = PB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

2. Vlastní číslo $\lambda$ je neřiditelné v případě, že bude platit:

$$h[\lambda_i I - A, B] < n \tag{11}$$

$n$ je řád systému. Pro určení podmínky řiditelnosti systému (A, B) vyjdeme z obecného tvaru matic.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \tag{12}$$

V důsledku toho, že matice A je diagonální a obsahuje tedy přímo vlastní čísla. Tak dosazením vlastního čísla do výše uvedeného vzorce bude hodnost matice A snížena minimálně o jedna. (v závislosti na algebraické násobnosti vlastního čísla.) Pokud ale budou všechny řádky matice B lineárně nezávislé, tak hodnost testovací matice $h[\lambda_i I - A, B]$ nebude snížena pod $n$ a systém bude řiditelný. V opačném případě, pokud matice B nebude mít vhodnou lineární nezávislost, tak systém bude neřiditelný.

3. Je potřeba zjistit vlastní čísla matice A.

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} = \lambda^3(\lambda+1) \tag{13}$$

Vlastní čísla matice pak jsou:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_{2,3,4} = 0 \tag{14}$$

Dále potřebujeme matici pozorovatelnosti systému

$$O = \begin{bmatrix} C \\ AC \\ A^2C \\ A^3C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Stav je nepozorovatelný, pokud je součástí jádra matice O. tj. $x \in ker(O)$

Hledáme proto řešení soustavy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0 \tag{16}$$

$$N(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Dále hledáme transformační matici $Q = [Q_o, v_1]$ , která umožní vytvořit standardní formu nepozorovatelných systémů. $v_1$ je vektor z nepozorovatelného podprostoru systému a $Q_o$ je matice složená z lineárně nezávislých vektorů matice O.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Nyní můžeme sestavit standardní tvar.

$$\tilde{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Dílčí bloky matice pak jsou:

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{A}_2 = -1 \tag{20}$$

Dále lze upravit i matici C.

$$\tilde{C} = CQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Z těchto výsledků již zjistíme, že

(a) Vlastní čísla matice $A_1$, $\lambda_{1,2,3} = 0$ jsou pozorovatelná vlastní čísla systému (A, C).

(b) Vlastní číslo $A_2 = \lambda_4 = -1$ je nepozorovatelným vlastním číslem. A mód náležící tomuto vlastnímu číslu je nepozorovatelný.

4. Vypočteme matici pozorovatelnosti

$$O = \begin{bmatrix} C \\ AC \\ A^2C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

A řiditelnosti systému:

$$\tilde{C} = \left[B, AB, A^2B\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Dále ještě potřebujeme jádro matice O.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0 \tag{24}$$

$$N(O) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Nyní můžeme určit transformační matici Q.

$$Q = [v_1, v_2, Q_n] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Její inverze je:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Nyní lze určit Kalmanovu formu matic

$$\tilde{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$\tilde{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\tilde{C} = CQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$\tilde{D} = D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

5. Příklad je podobný příkladu č. 4. z předchozího úkolu.

   (a) Spočítáme matici řiditelnosti:

   $$C = \left[B, AB, A^2B, A^3B\right] \tag{32}$$

   U matice vyjde plná hodnost, a systém by proto měl být řiditelný.

   (b) Když matici B upravíme tak, aby efekt síly $f_2$ byl nulový a přepočítáme matici řiditelnosti, tak vyjde opět plná hodnost. A systém by proto měl být řiditelný ze vstupu $f_1$

   Protože jde o spojitý systém, tak se zde dosažitelnost a řiditelnost nerozlišuje.

   Matice B může být upravena i tak, aby efekt síly $f_1$ byl nulový. ale opět vyjde plná hodnost.

Podobně je to i s dalšími typy určujících matic. (vždy vyjde plná hodnost a systém splňuje podmínky na pozorovatelnost a řiditelnost)

Problémem tohoto příkladu pravděpodobně je špatně podmíněná neceločíselná matice. A použití vhodného numerického řešení. K zjištění problematických stavů.